

מבנים אלגבריים*

תרגיל בית 7[†]

תזכורות ומושגים

- הומומורפיזם של חבורות f הוא פונקציה בין חבורות $f: G \rightarrow H$ המקיימת, לכל $g_1, g_2 \in G$, את השוויון $f(g_1)f(g_2) = f(g_1g_2)$. אם f חח"ע אז הוא נקרא מונומורפיזם. אם f על אז הוא נקרא אפימורפיזם. אם f חח"ע ועל אז הוא נקרא איזומורפיזם.
- יהיו G, H חבורות. אם קיים איזומורפיזם $f: G \rightarrow H$ אז אומרים ששתי החבורות איזומורפיות זו לזו, ומסמנים $G \cong H$.
- יהי $f: G \rightarrow H$ הומומורפיזם. נסמן $\ker f = \{g \in G: f(g) = e_H\}$. זהו הגרעין של ההעתקה f .
- יהי $f: G \rightarrow H$ הומומורפיזם. נסמן $\text{Im} f = \{h \in H: \exists g \in G, f(g) = h\}$. זהו התמונה של ההעתקה f .
- מתקיים $\ker f \triangleleft G$ וכן $\text{Im} f \leq H$. אם f מונומורפיזם.
- נניח f הומומורפיזם מחבורה G , ונניח S היא קבוצה יוצרת של חבורה G . אם נתונים ערכי f על איברי S , אז ניתן לקבוע באופן יחיד את f . מנגד, אם נתונים ערכי ההעתקה f על איברי S , לא בטוח שניתן להשלים את ערכי f להומומורפיזם.
- משפט האיזומורפיזם הראשון: יהי $f: G \rightarrow H$ אפימורפיזם. אזי ההעתקה המושרה $\tilde{f}: G/\ker f \rightarrow H$ היא איזומורפיזם. לשון אחר: יהי $f: G \rightarrow H$ מונומורפיזם. אזי ההעתקה המושרה $\tilde{f}: G/\ker f \rightarrow \text{Im} f$ היא איזומורפיזם.

שאלה 1 תהייה G, H חבורות.

- נגדיר העתקה $f: G \rightarrow G \times H$ על ידי $f(g) = (g, e_H)$. הראו כי f הומומורפיזם של חבורות, חשבו את הגרעין $\ker f$ ואת התמונה $\text{Im} f$. האם זהו מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם?

*נא לרשום על התרגיל את שם התלמיד, מספר זהו ומספר קבוצה.
[†]יש להגיש בשיעור התרגיל בפרשת בא:

קבוצה 03 - הגשה בשיעור ביום שני, כ"ז בטבת (30 דצמ').
שאר הקבוצות - הגשה בשיעור ביום חמישי, א' בשבט (2 ינו').

2. נגדיר העתקה $f: G \times H \rightarrow G$ על ידי $(g, h) \xrightarrow{f} g$. הראו כי f הומומורפיזם של חבורות, חשבו את הגרעין $\ker f$ ואת התמונה $\text{Im} f$. האם זהו מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם?

שאלה 2 בכל סעיף קבעו האם החבורות הן איזומורפיות. הסבירו קביעתכם.

1. \mathbb{Z}_{121} ו $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11}$.

2. \mathbb{Z}_{21} ו $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$.

3. \mathbb{R} ו \mathbb{R}^* . (שימו לב מה פעולת החבורה בשתי החבורות האלו).

4. D_3 ו S_3 .

5. D_{12} ו S_4 .

6. D_4 ו Q_8 (חבורת הקוטרניונים, שהופיעה כבר בתרגיל בית 5; שימו לב לתיקון שהובא באתר הקורס לגבי חבורה זו).

הערה בשאלה זו די לציין בפירוש כי העתקה מסוימת היא איזומורפיזם, ללא הוכחה.

שאלה 3 הוכיחו שהחבורה $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0) \right\}$ עם פעולת כפל מטריצות היא איזומורפית ל- \mathbb{C}^* .

שאלה 4 תהי G חבורה, $H \leq G$, $N \trianglelefteq G$.

1. נסמן $K = H \cap N$. הוכיחו K היא תת-חבורה נורמלית של H .

2. לכל איבר בחבורת המנה $aK \in H/K$ נגדיר העתקה $\phi(aK) = aN$. הוכיחו כי ϕ מוגדרת היטב. כלומר, לכל $a, b \in H$, אם $aK = bK$, אזי $\phi(aK) = \phi(bK)$. זאת אומרת שהתמונה של ϕ אינה תלויה בבחירת נציג מחלקת שקילות ובכך מגדירה פונקציה מ H/K ל G/N .

3. הראו כי ϕ מהסעיף הקודם היא מונומורפיזם.

שאלה 5 יהיו G, H חבורות סופיות. יהי $f: G \rightarrow H$ הומומורפיזם של חבורות. הוכיחו כי הסדר של התמונה $\text{Im} f$ מחלק את $\text{gcd}(|G|, |H|)$.

שאלה 6 מה האפשרויות ל- $\text{Im} f$ בשני המקרים הבאים:

1. $f: \mathbb{Z}_{15} \rightarrow \mathbb{Z}_{18}$.

2. $f: \mathbb{Z}_{15} \rightarrow D_5$.

רמז היעזרו בשאלה 5 למציאת הסדרים האפשריים של $\text{Im} f$. לאחר מכן מצאו את כל הת"ח של H מסדרים אלו.

שימו לב! לכל אפשרות שמצאתם ל- $\text{Im} f$, יש להראות כי קיים הומומורפיזם f תואם. הדרך הנוחה ביותר להראות קיום היא למצוא הומומורפיזם כזה. בשאלה זו די לציין את ההומומורפיזם f , בלא כל הוכחה לגביו.

3. (רשות) מצאו כמה הומומורפיזמים שונים יש בשני מקרים אלו.

שאלה 7 נניח כי $f: Q_8 \rightarrow \mathbb{Z}_8$ הומומורפיזם של חבורות.

1. הוכיחו כי f איננו על, ולכן $|\text{Im} f| \neq 8$.

2. מצאו f כזה שיקיים $|\text{Im} f| = 2$.

3. (רשות) הראו כי לא יכול להיות $|\text{Im} f| = 4$.

שאלה 8

1. נביט ב- (\mathbb{C}^*, \cdot) . $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$ נסמן פונקציה $f: G \rightarrow G$ המוגדרת על ידי $f(x) = x^4$. זו העתקה מוגדרת היטב, כי לכל $x \in G$ קיים $y \in \mathbb{C}$ אחד ויחיד כך ש- $f(x) = y$, וכן $y \neq 0$. לכן ניתן לקבוע כי $y \in G$. הוכיחו כי f אפימורפיזם.

2. מצאו חבורה G ותח"נ לא טריוויאלית $H \triangleleft G$ של $\{e\} \neq H$, המקיימות $G/H \cong G$.

רמז היעזרו בסעיף 1.