טענה:

$$\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}$$

הגדרות מתורת המספרים האלמנטרית

1. יהיו $x, y \in \mathbb{Z}$. אנו אומרים שמספר x מחלק את מספר y ומסמנים $x \mid y$ אם

$$\exists r \in \mathbb{Z} : xr = y.$$

2. אם לא קיים מספר r שכנ"ל אומרים שx, y **הם זרים (coprime)**.

הוכחה

קל להוכיח זאת. נעשה זאת בשתי דרכים. נניח בשלילה שהוא אכן רציונלי אז

$$\exists n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} : n, m \text{ are coprime}, \frac{n}{m} = \sqrt[3]{3}$$

נעלה את שני האגפים בחזקת 3. מכאן ניתן כאמור לפתור בשתי דרכים מתוכן נביא את המפורטת. שימו לב שמתקיים בסימונים הנ"ל

$$n^3 = 3m^3$$

אולם מכאן נובע ש$3 \mid n^3$ (3 מחלק את n^3). אך מכך ש־3 ראשוני נסיק ש $3 \mid n$ שכן כל ראשוני שמחלק את המספר c^k (עבור $c \in \mathbb{Z}$) מחלק גם את c עצמו. מכך ש־3 ראשוני המחלק את a נסיק ש27 מחלק את a^3. נתבונן כעת ב:

$$m^3 = \frac{n^3}{3}.$$

אם כך קל לראות שb^3 הוא מהצורה

$$m^3 = \frac{27d^3}{3} = 9d^3.$$

אולם מכאן בדומה ממש לתחילת הפתרון

$$9 \mid m^3 \Rightarrow 3 \mid m^3 \Rightarrow 3 \mid m$$

אבל מכאן 3 מחלק את שני הגורמים וזה בסתירה לזרותם.