

תרגיל 6

1.

(א) יהיו $B = \{(1, 0, 1), (1, 2, 3), (0, 4, 0)\}$ ו- $C = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$ שני בסיסים ל- \mathbb{R}^3 . מצאו את $[I]_C^S, [I]_S^B$ כאשר $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ הבסיס הסטנדרטי וחשב את $[I]_C^B$.

$$[I]_S^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{פתרון:}$$

$$[I]_S^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ממשפט: $[I]_C^S = ([I]_S^C)^{-1}$

$$[I]_C^S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \text{לכן:}$$

כעת, ידוע ש $[I]_C^B = [I]_C^S [I]_S^B$, ולכן

$$[I]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0.5 & 0.5 & -2 \end{pmatrix}$$

(ב) יהי וקטור v כך ש $[v]_B = (4, 5, 6)$, מצאו את $[v]_C$.
פתרון:

$$[v]_C = [I]_C^B [v]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0.5 & 0.5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 25 \\ -7.5 \end{pmatrix}$$

2. יהי $B = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ בסיס ל- \mathbb{R}^3 , ותהי מטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(א) נתון ש $A = [I]_B^C$ עבור איזשהו בסיס C . מצאו את C .
פתרון: יהי בסיס $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ כך ש $A = [I]_B^C$. כלומר, עמודות A הן הקורדינטות של איברי C לפי הבסיס B .

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [c_1]_B \Rightarrow c_1 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [c_2]_B \Rightarrow c_2 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = [c_3]_B \Rightarrow c_3 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$.C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \text{ לכּן}$$

(ב) נתון ש $A = [I]_E^B$ עבור איזשהו בסיס E . מצאו את E .
פתרון: ראשית, נמצא את $[I]_B^E$, ואז נוכל לפתור באותה דרך כמו בסעיף א'.

$$[I]_B^E = ([I]_E^B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

כעת,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [e_1]_B \Rightarrow e_1 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = [e_2]_B \Rightarrow e_2 = 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = [e_3]_B \Rightarrow e_3 = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$.E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ לכּן}$$

3. תהא $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ה"ל המוגדרת

$$\forall p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : T(p(x)) = (p(1), p'(1))$$

כאשר $p(1)$ זה הצבה של 1 בפולינום. ו $p'(1)$ זה הצבה של 1 בנגזרת של הפולינום.

(א) מצא מטריצה מייצגת $[T]_S^E$ כאשר S הבסיס הסטנדרטי ו $E = \{1, x, 1 + x^2\}$
פתרון: נחשב

$$T(1) = (1, 0), T(x) = (1, 1), T(1 + x^2) = (2, 2)$$

ולכן

$$[T]_S^E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ב) חשב את $\ker T, \text{Im} T$
פתרון: נחשב

$$C \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^2$$

לכן $\text{Im} T = \mathbb{R}^2$ בנוסף

$$N \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ולכן

$$\ker T = \text{span} \{-2x + (1 + x^2)\} =$$

4. תהא $T : V \rightarrow V$ ה"ל. יהא $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ בסיס ל V ונתון כי $[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$.

(א) יהא C בסיס אחר ל V . חשב את הדטרמיננטה של $[T]_C^C$. האם T הפיכה?
פתרון: מתקיים

$$[T]_C^C = [I]_C^B [T]_B^B [I]_B^C$$

ולכן

$$\det [T]_C^C = \det \left([I]_C^B [T]_B^B [I]_B^C \right) = \det [I]_C^B \cdot \det [T]_B^B \cdot \det [I]_B^C = \frac{1}{\det [I]_B^C} \cdot 2 \cdot \det [I]_B^C = 2$$

כאשר משתמשים בכך ש $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
 ולכן היא הפיכה

(ב) יהא n טבעי חשב $[T^n]_B^B$

(ג) נסמון $B' = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$ כאשר $v'_1 = v_2, v'_2 = v_1, v'_3 = v_3$ ומוצא מטריצה P הפיכה כך ש

$$[T]_{B'}^{B'} = P [T]_B^B P^{-1}$$

פתרון: מהגדרת מטריצה מייצגת נקבל כי

$$Tv_1 = v_1$$

$$Tv_2 = v_1 + v_2$$

$$Tv_3 = 2v_3$$

ולכן

$$[T]_{B'}^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & & 2 \end{pmatrix}$$

מתקיים

$$[T]_{B'}^{B'} = [I]_{B'}^B [T]_B^B [I]_B^{B'}$$

ולכן נסמון

$$P = [I]_{B'}^B = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

ונקבל את המבוקש

בהצלחה!