מבוא לאנליזה מתקדמת מבחן לדוגמא

מרצה: תמר בר־און.
משך הבחינה: שעתיים וחצי.
הוראות: יש לענות על כל השאלות. בכל שאלה יש להראות דרך, ותשובה סופית. תשובה סופית בלי דרך לא תקבל ניקוד!
משקל שאלות 1־4: 23 נקודות כל אחת.
משקל שאלה 5: 18 נקודות.
כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.
חומר עזר: מחשבון פשוט.
בהצלחה!

1. מצאו פתרון לבעיית ההתחלה הבאה:

$$xy' - 8y = x^3\sqrt{y}$$

$$y(1) = 8$$

והוכיחו שהוא יחיד.
פתרון:

נסדר את המשוואה באופן הבא: $y' = \frac{8}{x}y + x^2\sqrt{y}$

זאת משוואה מהצורה $y' = f(x,y)$. הפונקציה $f(x,y) = \frac{8y}{x} + x^2\sqrt{y}$ רציפה במלבן הפתוח $D = \{(x,y) : 0 < x < \infty, 0 < y < \infty\}$ וכן f_y מוגדרת ורציפה בD. $(1,8) \in D$ ולכן לפי משפט הקיום והיחידות קיים פתרון יחיד שעובר בנקודה הזאת.

כעת נמצא אותו.

נציג את המשוואה כך:

$$y' - \frac{8}{x}y = x^2\sqrt{y}$$

זוהי משוואת ברנולי עם $m = \frac{1}{2}$. היא נפתרת באמצעות ההצבה הבאה:

$$z = y^{1-m} = \sqrt{y}$$

נקבל את המשוואה:

$$2z' - \frac{8}{x}z = x^2$$

זאת משוואה לינארית. נסמן: $a(x) = -\frac{4}{x}, b(x) = \frac{1}{2}x^2$

$A(x) = \int a(x)dx = -4\ln x$

$z = e^{-A(x)}(\int e^{A(x)}b(x) + c) = e^{4\ln x}(\int \frac{1}{2}x^2 e^{-4\ln x}dx + c) = x^4(\int \frac{1}{2}x^{-2}dx + c) = cx^4 - \frac{1}{2}x^3$

כעת, מכיוון ש$y(1) = 8$, אז $z(1) = \sqrt{y(1)} = \sqrt{8}$.

נציב במשוואה ונקבל: $\sqrt{8} = c - \frac{1}{2}$ כלומר, $c = \sqrt{8} + \frac{1}{2}$.

לבסוף, $y = z^2 = ((\sqrt{8} + \frac{1}{2})x^4 - \frac{1}{2}x^3)^2$.

2. מצאו פתרון כללי למד"ר הבאה:

$$5x - y^2 + (2x+3)yy' = 0$$

נכתוב את המד"ר בצורה הבאה: $(5x - y^2)dx + (2xy + 3y)dy = 0$.

נסמן: $X = 5x - y^2, Y = 2xy + 3y$. ניתן לראות כי: $\frac{X_y - Y_x}{Y}$ תלוי בx בלבד, ולכן אפשר למצוא גורם אינטגרציה שתלוי בx. נסמנו ב$\mu(x)$. על מנת למצוא אותו, נפתור את המשוואה הבאה:

$$(\mu X)_y = (\mu Y)_x$$

כלומר, $-2y\mu = \mu'(2xy + 3y) + 2y\mu$

נצמצם בy ונסדר את המשוואה: $\frac{d\mu}{dx}(2x+3) = -4\mu$. זאת משוואה פרידה:

$\frac{d\mu}{-4\mu} = \frac{dx}{2x+3}$.

$-\frac{1}{4}\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x+1.5}$.

$-\frac{1}{2}\frac{d\mu}{\mu} = \frac{dx}{x+1.5}$

$-\frac{1}{2}\ln|\mu| = \ln|x+1.5| + c$

$\ln\frac{1}{\sqrt{\mu}} = \ln|x+1.5| + c$

נבחר את הפתרון $\mu = \frac{1}{(x+1.5)^2}$.

עכשיו יש לנו את המשוואה הבאה:

$$\frac{5x-y^2}{(x+1.5)^2}dx+\frac{2xy+3y}{(x+1.5)^2}dy=0$$

שהיא בעצם:

$$\frac{5x-y^2}{(x+1.5)^2}dx+\frac{2y}{x+1.5}dy=0$$

$.\int\frac{2y}{x+1.5}dy=\frac{y^2}{x+1.5}+c(x)$

נגור לפי x ונשווה ל$\frac{5x-y^2}{(x+1.5)^2}$

$$\frac{-y^2}{(x+1.5)^2}+c'=\frac{5x-y^2}{(x+1.5)^2}$$

$$c'=\frac{5x}{(x+1.5)^2}$$

$$c=\int\frac{5x}{(x+1.5)^2}dx$$

על מנת לחשב את האינטגרל נשתמש בטריק הבא:

$$\frac{5x}{(x+1.5)^2}=\frac{5x+7.5}{(x+1.5)^2}-\frac{7.5}{(x+1.5)^2}=\frac{5}{x+1.5}-\frac{7.5}{(x+1.5)^2}$$

לכן $\int\frac{5x}{(x+1.5)^2}dx \;=\; 5\int\frac{1}{x+1.5}-7.5\int\frac{1}{(x+1.5)^2} \;=\; 5\ln|x+1.5|+7.5\frac{1}{x+1.5}$

לסיכום, הפתרון הכללי של המד"ר הוא:

$$\frac{y^2+7.5}{x+1.5}+5\ln|x+1.5|=c$$

3. פתרו את המד"ר הבאה:

$$y\cdot y''-3(y')^3=0$$

בתחום $y>0$.

הערה: שימו לב גם לפתרונות סינגולריים.

פתרון:

נציב $z=y'$. נקבל:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

כלומר

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}z$$

נציב במשוואה:

$$y\frac{dz}{dy}z - 3z^3 = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{z}{3z^3}dz$$

יש פתרון סינגולרי $z = 0$. כלומר, $y = c$.

עבור הפתרונות הלא סינגולריים:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{3z^2}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dz}{3z^2}$$

$$\ln y + c = \frac{-1}{3z}$$

נציב בחזרה $z = y' = \frac{dz}{dx}$

ושוב קיבלנו משוואה פרידה:

$$(3\ln y + c)dy = -dx$$

$$\int (3\ln y + c)dy = -\int dx$$

$$3y\ln y - 3y + cy + c' = -x$$

לא ניתן לחלץ את y.

4. מצאו את הפתרון הכללי למד"ר הבאה:

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 + 2x + 4$$

פתרון:

ראשית, נמצא פתרון כללי למערכת ההומוגנית: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

המשוואה האופיינית היא $\lambda^2-3\lambda+2=0$. יש לה שני שורשים שונים: $\lambda_1=1, \lambda_2=$
2. לכן הפתרון הכללי למערכת ההומוגנית הוא: $y_0=c_1e^x+c_2e^{2x}$.

כעת, נמצא פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית.

מאחר שהחלק הלא הומוגני שווה ל$(x^2+2x+4)e^{0x}$ ו0 אינו שורש של המשוואה האופיינית, אז ניתן לנחש פתרון מהצורה

$$y_p = ax^2+bx+c$$

כעת נציב במד"ר.

$$2a-3(2ax+b)+2(ax^2+bx+c)=x^2+2x+4$$

נשווה מקדמים ונקבל 3 משוואות ב3 נעלמים:

$$\begin{cases} 2a=1 \\ -6a+2b=2 \\ 2a-3b+2c=4 \end{cases}$$

הפתרון הוא: $y_p=\frac{1}{2}x^2+2\frac{1}{2}x+5\frac{1}{4}$

ומכאן שהפתרון הכללי של המערכת הלא הומוגנית הוא:

$$y=c_1e^x+c_2e^{2x}+\frac{1}{2}x^2+2\frac{1}{2}x+5\frac{1}{4}$$

5. יהיו f,g שתי פונקציות גזירות ברציפות בקטע I. הוכיחו/הפריכו:

(א) אם f,g בת"ל בקטע I אז גם f',g' בת"ל בקטע I.
הפרכה:
נקח $f(x)=x$ ו$g(x)=1$. אז f,g בת"ל על כל הישר, כי הוורונסקיאן שלהן הוא:

$$W(x)=\det\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=1\neq 0$$

אולם f',g' תלויים, כי $g'=0$, וכל קבוצה שמכילה את 0 תלויה.

(ב) אם f',g' בת"ל בקטע I, אז גם f,g בת"ל בקטע I.
הוכחה:
נניח בשלילה שf,g תלויים. אז קיימים $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ לא שניהם 0 כך ש$\alpha f+\beta g\equiv 0$ על הקטע I. אזי $\alpha f'+\beta g'=(\alpha f+\beta g)'=0'=0$. כלומר, f',g' תלויים לינארית. סתירה.