

תרגיל על סופרמום ואינפימום

תרגיל

תהי (X, \leq) קבוצה סדורה חלקית ויהיו $A, B \subseteq X$. נניח כי $\sup B$ קיים. הוכיחו כי:

ואגף ימין קיים אם ורק אם אגף שמאל קיים (כמובן שהסופרמום לא חייב להיות קיים...).

הוכחה

בפתרון התרגיל נשתמש בתכונה הבאה (ההוכחה קלה ונשאיר אותה כתרגיל):

- אם $\sup C$ קיים אז c חסם עליון של C אם ורק אם $\sup C \leq c$.

נגדיר את הקבוצות הבאות:

S - קבוצת כל החסמים העליונים של $A \cup B$
 T - קבוצת כל החסמים העליונים של $A \cup \{\sup B\}$

טענה: $S = T$.

הוכחת הטענה: נראה ש- $s \in S \Leftrightarrow s \in T$. באמת:

$$\begin{aligned} s \in S &\Leftrightarrow \text{(הגדרת } S) \\ &\Leftrightarrow \text{לכל } x \in A \cup B : x \leq s \\ &\Leftrightarrow \text{לכל } x \in A : x \leq s \text{ וגם לכל } x \in B : x \leq s \\ &\Leftrightarrow \text{לכל } x \in A : x \leq s \text{ וגם } s \text{ חסם עליון של } B \text{ (כאן אנחנו משתמשים בתכונה)} \\ &\Leftrightarrow \text{לכל } x \in A : x \leq s \text{ וגם } \sup B \leq s \\ &\Leftrightarrow \text{(הגדרת } T) \text{ לכל } x \in A \cup \{\sup B\} : x \leq s \\ &\Leftrightarrow s \in T \end{aligned}$$

מש"ל טענה

כעת, $\sup(A \cup B)$ קיים \Leftrightarrow (הגדרה)
ב- S קיים איבר קטן ביותר $\Leftrightarrow (S = T)$
ב- T קיים איבר קטן ביותר \Leftrightarrow (הגדרה)
 $\sup(A \cup \{\sup B\})$ קיים.

במקרה שהסופרמום קיים, $\sup(A \cup B)$ הוא האיבר הקטן ביותר ב- S , שהוא האיבר הקטן ביותר ב- T והוא שווה ל- $\sup(A \cup \{\sup B\})$. לכן, $\sup(A \cup \{\sup B\}) = \sup(A \cup B)$.

מש"ל.

מסקנה

יהי (X, \leq) סריג. אזי לכל תת קבוצה סופית לא ריקה של X קיים סופרמום.

הוכחה

תהי $\emptyset \neq A \subseteq X$ קבוצה סופית. נוכיח באינדוקציה על הגודל של A (שיסומן ב- $|A|$) ש- $\sup A$ קיים.

אם $|A| = 1$, אז המסקנה ברורה. ($\sup\{a\} = a$. בדקו!).

נניח כי הוכחנו את המסקנה כאשר $|A| = k - 1$ ($k \geq 2$), ונוכיח את המסקנה כאשר $|A| = k$:
נכתוב $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ונגדיר $B = \{a_2, \dots, a_k\}$. אזי לפי הנחת האינדוקציה, $\sup B$ קיים.
בנוסף, היות ו- (X, \leq) סריג, $\sup\{a_1, \sup B\}$ קיים (בסריג קיים סופרמום לכל קבוצה בת שני איברים). נשים לב ש- $\sup(\{a_1\} \cup \{\sup B\}) = \sup\{a_1, \sup B\}$ ולכן, לפי התרגיל $\sup(\{a_1\} \cup B)$ קיים. אבל $\{a_1\} \cup B = \{a_1, \dots, a_k\} = A$ ולכן הוכחנו של- $\sup A$ קיים.

מש"ל.

הערה

באופן דומה, בסריג, לכל קבוצה סופית לא ריקה יש אינפימום.