

1. יהי V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} . תהי $W \subseteq V$ קבוצה. הוכח כי W היא תת מרחב של V אם ורק אם מתקיימים התנאים הבאים:

$$\bullet W \neq \emptyset$$

$$\bullet \text{לכל } u, v \in W \text{ ולכל } \alpha \in \mathbb{F} \text{ מתקיים } u + \alpha v \in W$$

2. יהיו U, V, W תתי מרחבים של מרחב וקטורי. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

$$(א) U \cap (V + W) = U \cap V + U \cap W$$

$$(ב) U \cap (V + W) \neq U \cap V + U \cap W$$

$$(ג) U \cap (V + W) \subseteq U \cap V + U \cap W$$

$$(ד) U \cap (V + W) \supseteq U \cap V + U \cap W$$

3. יהי V מרחב וקטורי. ויהיו $A, B \subseteq V$ קבוצות כלשהן. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

$$(א) \text{span}(A + B) = \text{span}(A) \cup \text{span}(B)$$

$$(ב) \text{span}(A \cup B) = \text{span}(A) \cup \text{span}(B)$$

$$(ג) \text{span}(A \cup B) = \text{span}(A) + \text{span}(B)$$

$$(ד) \text{span}(A \cap B) = \text{span}(A) \cap \text{span}(B)$$

$$\text{זכור כי } A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

4. (א) יהי V מרחב וקטורי מעל השדה \mathbb{Z}_p . תהי $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ קבוצה בלתי תלויה לינארית. הוכח כי $|\text{span}(A)| = p^n$.

(ב) האם הסעיף הקודם נכון גם בלי הדרישה ש A בלתי תלויה לינארית? הוכח או הפרך.

(ג) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} כך ש $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$. תהי $A \subseteq V$ קבוצה כך ש $A \neq \{0\}$. האם $\text{span}(A)$ תמיד אינסופי? הוכח או הפרך.

5. יהיו U, W, V תתי מרחבים של מרחב וקטורי. הוכח או הפרך:

$$(א) U + W = W + U$$

$$(ב) (U + W) + V = U + (W + V)$$

$$(ג) U \oplus V = U \oplus W \Rightarrow V = W$$

6. יהי V מרחב וקטורי. יהיו U, W שני תתי מרחבים של V כך ש B_1 בסיס של U ו B_2 בסיס של W . הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

$$(א) B_1 \cup B_2 \text{ בסיס של } U + W$$

$$(ב) B_1 \cup B_2 \text{ אינו בסיס של } U + W$$

$$(ג) \text{אם } U \cap W = \{0\} \text{ אז } B_1 \cup B_2 \text{ בסיס של } U \oplus W$$

$$(ד) \text{אם } U \cap W = \{0\} \text{ אז } B_1 \cup B_2 \text{ אינו בסיס של } U \oplus W$$

$$(ה) B_1 \cap B_2 \text{ בסיס של } U \cap W$$

$$(ו) B_1 \cap B_2 \text{ אינו בסיס של } U \cap W$$

7. מצא בסיס עבור קבוצת הפתרונות של כל אחת ממערכות המשוואות הבאות (מעל \mathbb{R}). עבור כל אחת מהן מצא גם את המימד.

(א)

$$\begin{aligned}x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 0\end{aligned}$$

(ב)

$$\begin{aligned}x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\2x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 0\end{aligned}$$

8. מהו המימד של המרחבים הוקטוריים הבאים?

(א) \mathbb{C}^n כמרחב וקטורי מעל \mathbb{C} .

(ב) \mathbb{C}^n כמרחב וקטורי מעל \mathbb{R} .

9. יהי V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} ויהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V .

(א) עבור אילו ערכי $c \in \mathbb{F}$ הקבוצה $\{cv_1, \dots, cv_n\}$ היא בסיס?

(ב) עבור אילו ערכי $\alpha \in \mathbb{F}$ הקבוצה $\{v_1 + \alpha v_1, v_2 + \alpha v_1, \dots, v_n + \alpha v_1\}$ היא בסיס?

10. יהי V מרחב וקטורי ממימד 3 ויהיו $v_1, v_2, v_3 \in V$ וקטורים המקיימים $v_1 + v_2 + v_3 = 0$. הוכח או הפרך:

(א) $span(\{v_1\}) + span(\{v_2\}) + span(\{v_3\}) = V$

(ב) $span(\{v_1\}) + span(\{v_2\}) + span(\{v_3\}) \neq V$