

תרגיל 3

להגשה עד 4.12.16

שאלה 1

1. הראו שכל קבוצה פתוחה היא איחוד בן מניה של קבוצות סגורות (תכונה זו נקראת F_σ).
2. הראו שכל קבוצה סגורה היא חיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות (תכונה זו נקראת G_δ).

שאלה 2

יהיו $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ שתי משפחות של קבוצות ב- X . הראו כי אם $\mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{A}_2 \subseteq \sigma(\mathbb{A}_1)$ אזי נובע כי $\sigma(\mathbb{A}_1) = \sigma(\mathbb{A}_2)$.

שאלה 3

יהיו X קבוצה, $\mathbb{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. הראו כי לכל $A \in \sigma(\mathbb{A})$ קיימת משפחה בת מנייה $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ כך ש: $A \in \sigma(\mathbb{B})$.

הדרכה:

1. הראו כי קבוצת הקבוצות ב- $\sigma(\mathbb{A})$ המקיימת תכונה זו הינה σ אלגברה.
2. הראו כי הקבוצות ב- \mathbb{A} מקיימות תכונה זו והסיקו את הנדרש.

שאלה 4

נניח ש $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ הינן מידות על מרחב מדיד (X, \mathbb{A}) ולכל $A \in \mathbb{A}$ נגדיר: $\mu_n(A) \nearrow$.

$$\mu(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A)$$

האם μ הינה מידה? אם לא תנו דוגמא נגדית.

שאלה 5

יהי (\mathbb{X}, \mathbb{A}) מרחב מדיד.

1. תהי $a \in \mathbb{X}$. נגדיר: $\delta_a: \mathbb{A} \rightarrow [0, \infty]$ על ידי:

$$\delta_a(E) := \begin{cases} 1 & a \in E \\ 0 & a \notin E \end{cases}$$

הוכיחו כי δ_a היא מידה חיובית מעל \mathbb{A} .

2. תהי $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת מידות חיוביות מעל \mathbb{A} , $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת מספרים ב $[0, \infty]$. לכל $E \in \mathbb{A}$ נגדיר:

$$\mu(E) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n(E)$$

הוכיחו כי μ מידה חיובית מעל \mathbb{A} .

שאלה 6

יהי (X, \mathbb{A}, μ) מרחב מידה חיובית, ותהי Y קבוצה לא ריקה. נתונה פונקציה $f : X \rightarrow Y$.

1. נגדיר: $\mathbb{B}_f := \{F \subseteq Y : f^{-1}(F) \in \mathbb{A}\}$. הוכיחו כי (Y, \mathbb{B}_f) הינו מרחב מדיד.

2. לכל קבוצה $E \subseteq Y$ ששייכת ל \mathbb{B}_f , נגדיר: $\nu(E) := \mu(f^{-1}(E))$.

הוכיחו כי (Y, \mathbb{B}_f, ν) הינו מרחב מידה חיובית.

הערה: (Y, \mathbb{B}_f, ν) נקרא מרחב המידה המושרה מ (X, \mathbb{A}, μ) על ידי f .

בהנאה!