

תרגיל בית 3

1. תנו דוגמא לפונקציה f שאינה מדידה לבג אבל $|f|$ כן מדידה לבג.

2. תהי $\{A_i\}$ סדרה של קבוצות זרות במרחב מדיד (X, S) .

i. יהיו $\{g_i\}_{i \geq 1}$ סדרה של פונקציות על X המדידות S . הראו כי $\sum_{i=1}^{\infty} 1_{A_i} g_i$ מתכנסת ומדידה S .

ii. נניח כי $\bigcup_n A_n = X$. תהי $\mathcal{G} = \sigma(\{A_i : i \geq 1\})$ ופונקציה $h : X \rightarrow \mathbb{R}$. הראו כי h מדידה אמ"מ h קבועה על כל A_i .

3. יהי מרחב מדיד (X, S) ועליו מוגדרות הפונקציות המדידות $f_1, f_2, f_3 : X \rightarrow \mathbb{R}$

$(i = 1, 2, 3)$. התבוננו במשוואה הבאה

$$f_1(x)t^2 + f_2(x)t + f_3(x) = 0$$

זוהי משוואה ריבועית ב t לכל $x \in X$.

הראו כי $A = \{x \in X : \text{the equation has two distinct roots}\}$ הינה מדידה S .

4. יהי מרחב מדיד (X, S) ויהיו f, g פונקציות מדידות S המקבלות ערכים ב \mathbb{R} . הראו כי

$$\text{הפונקציה } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} 1_{(g(x) \neq 0)}$$

הינה מדידה S .

מכיוון שהפונקציה $f - \alpha g$ הינה מדידה נקבל כי הקבוצה לעיל מדידה ומכאן ש h מדידה.

5. (בונוס) תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, ותהי $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה ממשית. הראו שהקבוצה

$$\{x \in U : f \text{ is continuous at } x\}$$

היא מטיפוס G_δ .

רמז:

א. הגדירו את $\omega(x) := \inf \{ \omega(x, \delta) : \delta > 0 \}$ כאשר

$$\omega(x, \delta) := \sup \{ |f(s) - f(t)| : s, t \in B(x, \delta) \}$$

ב. הראו כי לכל a ממשי הקבוצה $E_a = \{x : \omega(x) < a\}$ היא פתוחה.

ג. הציגו את אוסף כל ה x כך שהפונקציה רציפה בהם כחיתוך של קבוצות כאלה והסיקו את הנדרש.