

פתרון התרגיל הראשון

שאלה 1.3

ב. על פי חוק החילוף נקבל $a + c = c + a = c + b = b + c$ והגענו לסעיף א'. באותו אופן לגבי כפל.

$$ה. a = a \cdot 1 = a((a^{-1})(a^{-1})^{-1}) = (aa^{-1})(a^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1}$$

(בדוק מדוע השוויון האחרון נכון).

שאלה 2.3

ב. באותו האופן בו הוכחנו בכיתה כי \mathbb{N} אינו שדה.

$$ד. לא כי $1_F + 0_F \neq 1_F$$$

שאלה 3.1

א. נוכיח רק את קיום ההופכי ביחס לכפל (יש להוכיח את כל שאר התכונות, אך הן ממש טכניות).

אם $(a, b) \neq (0, 0)$ אזי $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$. איך מוצאים את ההפכי? פשוט רושמים

$(a, b) \cdot (c, d) = 1_C = (1, 0)$ ומקבלים 2 משוואות ב-2 נעלמים (הנעלמים הם c, d שאמורים להיות מבוטאים באמצעות a, b). אם נשתמש בהגדרת הכפל ונפתור את המשוואות נקבל

$$(c, d) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

ב. היות ומתקיים $(a, 1) \cdot (1, a) = (0, 0)$ (בדוק!) - קיבלנו מחלקי אפס, לכן אין זה שדה.

שאלה 3.6

א. פתרו את המשוואה $z^4 = -16i$. תחילה נעביר את $-16i$ להצגתו הפולרית:

$$-16i = 16 \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{2} \right)$$

נסמן $z = r \operatorname{cis}(\theta)$. נשווה את שני האגפים ונקבל:

$$r^4 \operatorname{cis}(4\theta) = 16 \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{2} \right)$$

(לפי נוסחת השורשים):

$$\left\{ 2 \operatorname{cis} \left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{4} \right), k = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

ב. פתרו את המשוואה $2z^2 - 8z = 10 - 20i + 12zi$. נעביר אגפים ונקבל את המשוואה

$$2z^2 - z(8 + 12i) + (20 - 10) = 0$$

הריבועית: נפתור לפי הנוסחה לפתרון משוואה

ריבועית ונקבל: $z_{1,2} = \frac{-(8+12i) \pm \sqrt{32i}}{4} = -2 - 3i \pm \sqrt{2i}$. נשים לב שמתקיים $(1+i)^2 = 2i$ ולכן: $z_1 = -2 - 3i$, $z_2 = -3 - 4i$.

שאלה 3.7

יהי $z = n + mi$, כאשר $n, m \in \mathbb{Z}$. נעלה אותו בחזקה שלישית ונשווה עם הנתון: $(n + mi)^3 = n^3 - 3nm^2 + i(3n^2m - m^3) = 2 + 11i$. מהשוואת החלקים הממשי והמדומה מקבלים

מערכת משוואות:
$$\begin{cases} n^3 - 3nm^2 = 2 \\ 3n^2m - m^3 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n(n^2 - 3m^2) = 2 \\ m(3n^2 - m^2) = 11 \end{cases}$$
 אם נתבונן במשוואה הראשונה,

נוכל לשים לב כי n חייב להיות אחד מהמספרים הבאים: $\pm 1, \pm 2$. באופן דומה m חייב להיות אחד מהמספרים הבאים: $\pm 1, \pm 11$. אבל הפתרון היחידים המקיים את שתי המשוואות יחד הוא: $n = 2, m = 1$. (מציבים $n = 2$ ומקבלים ש $m = 1$ וכשמציבים $n = \pm 1, -2$ רואים שאין פתרון שלם מתאים ל m).

שאלה 3.11

א. נפתור את המשוואה $z^n = 1$. מתקיים $(cis(\theta))^n = cis(n\theta) = 1$ ז"א $n\theta = 2\pi k$ עבור $0 \leq k < n$ ולכן הפתרונות הם $z_k = cis\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$ עבור $0 \leq k < n$. z_1 מקיים את הדרוש (מדוע?).
 ב. שימו לב: $z_1 \neq 1$ ולכן קיבלנו סידרה הנדסית $z_1 \neq 1$. נשתמש בנוסחה עבור

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \frac{z_1^n - 1}{z_1 - 1} = 0$$

סידרה הנדסית ונקבל:

שאלה 4.6

א. יש רמז באתר.
 ב. באינדוקציה. עבור $a = 0$ ברור ש $a^p = a$. נניח שהטענה נכונה עבור $a = n$ ונוכיח עבור $a = n + 1$. נשים לב שאם $a = p - 1$ סיימנו. אם $a \neq p - 1$ נקבל ש $n + 1 < p - 1$ ו- $(n + 1)^p = n^p + 1^p = n + 1$.
 ג. $\mathbb{Z}_p \subseteq F$ הוכחנו בכיתה (תרגיל 4.5 סעיף ב'). לפולינום $x^p - x = 0$ יכולים להיות לכל היותר p פתרונות. אם קיים $a \in F$ שלא נמצא ב- \mathbb{Z}_p נקבל לפחות $p + 1$ פתרונות לפולינום. כל האיברים ב \mathbb{Z}_p ובנוסף a וכבר קיבלנו $p + 1$ פתרונות.

שאלה 1.5

מדרגים לצורה משולשת עליונה ומוציאים את הפתרון:

$$\begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ 2\frac{i+1}{i-1} \end{pmatrix}$$

שאלה 1.6

(נישאר עם המשוואות, מבלי לעבור למטריצה):

אם נצמצם את המשוואה הראשונה ב-2 (למה זה מותר?) נקבל

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 8 \\ 3x + 6y + 10z = 4 \\ 4x + 8y + 2z = 9 \end{cases}$$

ונקבל את המערכת

$$R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2$$
$$R_3 - 4R_1 \rightarrow R_3$$

בצע את הפעולות הבאות:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 6y + 10z = 4 \\ 4x + 8y + 2z = 9 \end{cases}$$

קל לראות שלמערכת אין פתרון מעל \mathbb{Z} .

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 0x + 0y + z = -8 \\ 0x + 0y + -10z = -7 \end{cases}$$

(אגב, למערכת גם אין פתרון מעל הממשיים).

שאלה 1.7

למערכת $x + y + z = 0$ מעל \mathbb{Z}_7 יש בדיוק 49 פתרונות שונים.

(מדוע?)

שאלה 1.8

• נפתור באופן מלא רק את סעיף ג':

$$\begin{cases} x_1 + (a-1)x_2 - x_3 = 4 \\ ax_1 + (a-1)x_2 - x_3 = a+3 \\ x_1 + (a-1)x_2 + (a-3)x_3 = 7 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 - aR_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - R_1 \rightarrow R_3 \end{matrix}} \begin{cases} x_1 + (a-1)x_2 - x_3 = 4 \\ 0x_1 + (1-a)(a-1)x_2 + (a-1)x_3 = -3(a-1) \\ 0x_1 + 0x_2 + (a-2)x_3 = 3 \end{cases}$$

פתרון יחיד: $a \neq 1, 2$.

אין פתרון: כש $a = 2$ נקבל מהמשוואה השלישית סתירה ($x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3$) ולכן במצב זה אין פתרון.

אינסוף פתרונות: $a = 1$ נקבל מערכת $\begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 = 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + -x_3 = 3 \end{cases}$ או אם נחליף את השורות השנייה

והשלישית לקבלת צורה מדורגת $\begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 = 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + -x_3 = 3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$ וברור שישנם אינסוף פתרונות. המשתנה

החופשי הוא x_2 כי x_1 ו- x_3 משתנים מובילים (בצורה המדורגת הם המשתנים הראשונים בשורות הראשונה והשנייה כך שהמקדמים שלהם אינם אפסים) אם נציב $x_2 = t$ נקבל שאוסף הפתרונות הוא מהצורה $\{(1, t, -3) | t \in \mathbb{R}\}$.

- תשובה סופית לסעיף א': עבור $a = 0 \vee a = 1 \vee a = -1$ אין פתרון; עבור $a \neq 0 \wedge a \neq 1 \wedge a \neq -1$ יש פתרון יחיד.
- תשובה סופית לסעיף ב': עבור $a = 1$ אין פתרון; עבור $a = -1$ יש אינסוף פתרונות; עבור $a \neq 1 \wedge a \neq -1$ יש פתרון יחיד.