שדות ותורת גלואה
מערכי תרגול קורס 88-311

נובמבר 2018, גרסה 0.7

אוניברסיטת בר-אילן

סמסטר א' תשע"ט

תוכן העניינים

מבוא **3**

1 תרגול ראשון **4**
1.1 תזכורת מתורת החוגים 4

2 תרגול שני **7**
2.1 בנייה בסרגל ומחוגה 7
2.2 תזכורת נוספת מתורת החוגים 9

3 תרגול שלישי **10**
3.1 הרחבת שדות 10

4 תרגול רביעי **12**
4.1 שורשי יחידה 12
4.2 שדות פיצול 14

5 תרגול חמישי **16**
5.1 פולינומים ספרביליים 16

6 תרגול שישי **17**
6.1 חבורת גלואה 19

7 תרגול שביעי **19**
7.1 חישוב חבורות גלואה 19

מבוא

כמה הערות טכניות לתחילת הקורס:

- דף הקורס נמצא באתר www.math-wiki.com.
- שאלות בנוגע לחומר הלימודי מומלץ לשאול בדף השיחה באתר של הקורס.
- החומר בקובץ זה נאסף מכמה מקורות, ומבוסס בעיקרו על מערכי התרגול של איתמר שטיין ושירה גילת.
- נשתדל לכתוב בגופן הזה כשהגדרות ומושגים חשובים מופיעים בפעם הראשונה. נוסיף בצד גם את השם באנגלית, שעשוי לעזור כשמחפשים חומר נוסף שאינו בעברית. This font
- נשמח לכל הערה על מסמך זה.

מחבר בתשע"ט: תומר באואר

1 תרגול ראשון

1.1 תזכורת מתורת החוגים

Rng, or
non-unital ring
Additive group

הגדרה 1.1. חוג בלי יחידה $(R,+,\cdot,0)$ הוא מבנה אלגברי המקיים:

1. $(R,+,0)$ הוא חבורה אבלית. נקראת החבורה החיבורית של החוג.
2. $(R,\cdot)$ הוא חבורה למחצה.
3. מתקיים חוג הפילוג (משמאל ומימין). כלומר לכל $a,b,c\in R$ מתקיים

$$(a+b)c=ac+bc, \qquad a(b+c)=ab+ac$$

כאשר ההקשר ברור, נכתוב רק R במקום $(R,+,\cdot,0)$.

Field

הגדרה 1.2. R הוא שדה אם $(R\setminus\{0\},\cdot)$ הוא חבורה אבלית.

שדות הם חוגים מאוד טובים. הם חילופיים וכל איבר בהם הפיך. ראינו בקורס בתורת החבורות שאם F שדה, אז חוג הפולינומים במשתנה אחד $F[x]$ הם תחום אוקלידי, ולכן הוא תחום ראשי, ולכן הוא תחום פריקות יחידה. כל התכונות האלו יהיו מאוד שימושיות בהמשך.

נתחיל בחזרה לגבי פריקות של פולינומים מעל שדות. נסביר בהמשך למה זה רלוונטי לקורס שלנו.

Irreducible

תזכורת 1.3. יהי R תחום שלמות. איבר $a\in R$ לא הפיך נקרא אי פריק אם $a=bc$ גורר ש-b הפיך או c הפיך.

שאלה 1.4. בהינתן פולינום $f(x)\in F[x]$ איך ניתן לקבוע אם הוא אי פריק או לא?

חשוב להדגיש כל הזמן מה השדה שעובדים מעליו. למשל x^2-2 פריק מעל $\mathbb{R}$ אבל לא מעל $\mathbb{Q}$. עבורנו התכונה אי פריק היא "הבסיסית" יותר, ופולינום נקרא פריק אם הוא לא אי פריק. נציג מספר שיטות, ונתחיל בכמה אבחנות קלות:

- כל פולינום מדרגה 1 הוא אי פריק. אז המקרה הזה משעמם. מעכשיו נניח ש-$\deg f(x)\geq 2$.
- כל פולינום שיש לו שורש בשדה F הוא פריק. הסבר: α שורש של $f(x)$ אם ורק אם $x-\alpha\mid f(x)$.
- אם ל-$f(x)$ אין שורשים בשדה F זה לא אומר שהוא אי פריק. למשל ל-$f(x)=(x^2-5)^2$ מעל $\mathbb{Q}$ אין שורשים, אבל הוא פריק.

דוגמה 1.5. האם x^n-1 פריק עבור $n>1$ (נניח מעל $\mathbb{Q}$)? כן, כי מייד רואים ש-$x=1$ הוא שורש.

תרגיל 1.6. יהי $f(x)$ פולינום מדרגה 2 או 3 אזי $f(x)$ אי פריק אם ורק אם אין ל $f(x)$ שורשים.

פתרון. אם ל $f(x)$ יש שורש הסברנו כבר שהוא פריק. מצד שני אם $f(x)=g(x)h(x)$ כאשר $\deg g(x), \deg h(x) \geq 1$ אז אחד מהם חייב להיות מדרגה 1 וזה אומר של-$f(x)$ יש שורש.

דוגמה 1.7. האם x^2-x-1 פריק מעל $\mathbb{Q}$? פותרים, מגלים שהשורשים הם $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ שאינם רציונליים, ולכן הפולינום אי פריק.

תרגיל 1.8. האם הפולינום x^3-x+1 פריק מעל $\mathbb{Z}_3$?

פתרון. יש בסך הכל 3 מספרים בשדה. מסתבר שאף אחד מהם לא מאפס את הפולינום ולכן הוא אי פריק.

לשמחתנו, גם אם עובדים מעל $\mathbb{Q}$ יש דרך להגיע למספר סופי של שורשים אפשריים שצריך לבדוק.

הערה 1.9. אם $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ אז ניתן להכפיל בבמכפלה משותפת של המכנים ולקבל פולינום עם מקדמים שלמים שהוא פריק אם ורק אם $f(x)$ פריק. לכן כשעובדים מעל $\mathbb{Q}$ ניתן תמיד להניח שהמקדמים שלמים. למשל, לעבוד עם $3x^2+2$ במקום עם $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}$.

תרגיל 1.10. יהי $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ כאשר כל המקדמים שלמים, הוכיחו כי אם השבר המצומצם $\frac{q}{r}$ הוא שורש של $f(x)$ אז

$$q \mid a_0, \quad r \mid a_n$$

פתרון. לפי הנתון

$$a_n\left(\frac{q}{r}\right)^n+\cdots+a_0=0$$

נכפול ב-r^n ונקבל

$$a_nq^n+a_{n-1}q^{n-1}r+\cdots+a_1qr^{n-1}+a_0r^n=0$$

מה שאומר ש-$q \mid a_0r^n$ ו-$r \mid a_nq^n$, אבל בגלל ש-r ו-q זרים (הרי השבר מצומצם) אז מתקיים

$$q \mid a_0, \quad r \mid a_n$$

תרגיל 1.11. האם הפולינום x^3-x-6 אי פריק מעל $\mathbb{Q}[x]$?

פתרון. לפי התרגיל הקודם, אם $\frac{q}{r}$ פתרון (שהוא שבר מצומצם) אז

$$q \mid 6, \quad r \mid 1$$

כך שבסך הכל האפשרויות הן:

$$\frac{q}{r} \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$$

אם עוברים עליהן אפשר לראות ש-2 הוא שורש ולכן הפולינום פריק.

תרגיל 1.12. מצאו את הפירוק של x^3-x-6 לגורמים אי פריקים מעל $\mathbb{Q}$.

פתרון. היות ש-2 שורש של הפולינום אנחנו יודעים ש-$x-2 \mid x^3-x-6$. נשתמש בחילוק פולינומים ונגלה

$$\frac{x^3-x-6}{x-2}=x^2+2x+3$$

ל-x^2+2x+3 אין שורשים מעל $\mathbb{Q}$ ולכן הוא אי פריק. לסיכום הפירוק הוא

$$x^3-x-6=(x-2)(x^2+2x+3)$$

כמובן ששיטה זו עובדת גם מעל שדות סופיים.

גם עבור פולינום ממעלה גבוהה מ-3 או פולינומים מעל $\mathbb{R}$ אפשר להשתמש בשיטה הזו, אבל רק כדי למצוא שורש רציונלי ולהראות פריקות. אם לא מוצאים שורש אי אפשר להגיד כלום (בינתיים).

הערה 1.13. זכרו כי לפולינום מדרגה אי זוגית מעל $\mathbb{R}$ תמיד יש שורש אחד לפחות ולכן הוא תמיד פריק.

נעבור לטכניקות אחרות לבדיקת פריקות. מעכשיו נניח כי R תחום שלמות ו-F שדה השברים שלו.

משפט 1.14 (קריטריון אייזנשטיין). יהי R $\triangleright$ P אידאל ראשוני. יהי $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in R[x]$ פולינום המקיים

Eisenstein's criterion

- $a_i\in P$ לכל $i\neq n$
- $a_n\notin P$
- $a_0\notin P^2$

אז f אי פריק ב-$F[x]$ (אין לו פירוק אמיתי מעל R). אם f פרימיטיבי ב-R (המחלק המשותף המרבי של מקדמיו הוא 1), אז f אי פריק ב-$R[x]$.

במקרה הפרטי שבו $P=\langle p\rangle$ עבור איבר ראשוני p התנאים לעיל שקולים לכך ש-p לא מחלק את a_n, מחלק את a_i עבור $i\neq n$ ו-p^2 לא מחלק את a_0.

דוגמה 1.15. x^n-4x+2 אי פריק מעל $\mathbb{Q}$ כי הוא אייזנשטיין עבור $p=2\in\mathbb{Z}$. לפעמים צריך להתחכם יותר.

תרגיל 1.16. האם הפולינום $x^4+4x^3+6x^2-1$ אי פריק מעל $\mathbb{Q}$?

כדי לפתור את התרגיל נעזר בעובדה ההבאה:

טענה 1.17. $f(x)$ אי פריק אם ורק אם $f(x+c)$ אי פריק לכל $c\in F$.

הוכחה. קל לוודא שתמיד $f(x)$ ו-$f(x+c)$ מאותה דרגה ולכן $f(x)=g(x)h(x)$ פירוק אם ורק אם $f(x+c)=g(x+c)h(x+c)$ פירוק. $\square$

פתרון. אם נשים לב שהפולינום שלנו הוא למעשה

$$(x+1)^4 - 4(x+1) + 2$$

היות ש-$x^4 - 4x + 2$ אי פריק לפי קריטריון אייזנשטיין, אז גם הפולינום שלנו אי פריק.

לשיטה הבאה שנציג צריך תזכורת נוספת:

תזכורת 1.18 (גרסה ללמה של גאוס)**.** יהי R תחום שלמות ויהי F שדה השברים שלו. יהי $f(x) \in R[x]$. אז $f(x)$ אי פריק ב-$F[x]$ אם ורק אם הוא לא ניתן לפירוק למכפלת פולינומים לא קבועים שדרגתם קטנה מ-$\deg f(x)$.

תזכורת 1.19 (גרסה ללמה של גאוס)**.** יהי $f(x)$ פולינום שכל מקדמיו שלמים. נניח שהוא פרימיטיבי. אז $f(x)$ אי פריק ב-$\mathbb{Z}[x]$ אם ורק אם הוא אי פריק ב-$\mathbb{Q}[x]$.

משפט 1.20 (שיטת הרדוקציה)**.** יהי $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ויהי p ראשוני כלשהוא. נסמן ב-$\bar{f}(x)$ את הפולינום המתקבל מביצוע מודולו p למקדמי f. אם $\deg \overline{f}(x) = \deg f(x)$ ו-$\overline{f}(x)$ אי פריק אז גם $f(x)$ אי פריק.

את ההוכחה נשאיר כתרגיל מודרך לשיעורי בית. כעת נראה יישום.

תרגיל 1.21. האם הפולינום $8x^3 - 6x - 1$ אי פריק ב-$\mathbb{Q}[x]$?

פתרון. היות ש $\gcd(8,6,1) = 1$ הפולינום אי פריק ב-$\mathbb{Q}[x]$ אם ורק אם הוא אי פריק ב-$\mathbb{Z}[x]$. ננסה להשתמש בשיטת הרדוקציה.

ננסה $p = 2$: מתקבל -1 שאינו באותה דרגה כמו f.

ננסה $p = 3$: מתקבל $2x^3 - 1$ שהוא פריק ($x = 2$ שורש).

ננסה $p = 5$: מתקבל $3x^3 - x - 1$ שהוא במקרה אי פריק (בודקים 5 אפשרויות).

לכן גם הפולינום $8x^3 - 6x - 1$ אי פריק.

נחזור לשאלה מתחילת השיעור: למה כל זה יהיה חשוב לנו? זה הרי קורס בתורת השדות!

נזכר ש-$F[x]$ הוא תחום אוקלידי, ובחוג כזה מתקיים ש-$f(x)$ אי פריק, גורר ש-$f(x)$ ראשוני, גורר ש-$\langle f(x) \rangle$ אידיאל ראשוני, גורר ש-$\langle f(x) \rangle$ אידיאל מקסימלי ולכן $F[x]/\langle f(x) \rangle$ שדה.

כלומר התחלנו עם שדה F ופולינום אי פריק מעליו, ובנינו שדה חדש (אולי גדול יותר ומעניין יותר). אנחנו נשתמש בבנייה הזאת כל הזמן במהלך הקורס, אבל היא עובדת (כלומר, מתקבל שדה) <u>רק אם f פולינום אי פריק</u>.

טענה 1.22. לפולינום $f(x) \in F[x]$ מדרגה n מעל שדה יש לכל היותר n שורשים.

2 תרגול שני

2.1 בנייה בסרגל ומחוגה

נתאר "משחק" הנדסי במישור. לפעמים נחליף בין $\mathbb{R}^2$ ובין המישור המרוכב מבלי לשים לב. החוקים שלו הם כאלה: אם נחשוב על כל הנקודות, הישרים והמעגלים במישור

אז יש כאלה שאנחנו יכולים לבנות וכאלה שאנחנו לא יכולים לבנות. מה אנחנו יכולים לבנות? מותר להשתמש במספר סופי של הצעדים הבאים:

- בהינתן שתי נקודות P, Q בנות־בנייה, אפשר להעביר את הקו הישר העובר בינהן. זה שימוש בסרגל, שהוא לא מסומן בשנתות וארוך כרצוננו (ויש לו צד אחד).
- בהינתן שתי נקודות P, Q בנות־בנייה, אפשר להעביר את המעגל שמרכזו ב-P ועובר דרך Q. זה שימוש במְחוּגָה, שגם היא רחבה כרצוננו.
- בהינתן ישרים ומעגלים בני־בנייה, אפשר לבנות את נקודות החיתוך שלהם.

כדי להתחיל אנו מקבלים שתי נקודות שמקובל להכריז עליהן בתור $(0,0)$ ו-$(1,0)$. כבר בעולם העתיק ידעו לפתור בעיות בנייה רבות, בינהן:

- מציאת אמצע של קטע.
- הורדת אנך לישר דרך נקודה נתונה.
- לחצות זוית, הנתונה בין שני ישרים לא מקבילים.
- בניית מעגל שמרכזו בנקודה נתונה ורדיוסו באורך קטע נתון.
- בניית מחומש משוכלל, ובעיות יותר קשות.

הגדרה 2.1. המספר $a \in \mathbb{R}$ הוא מספר בר־בנייה אם $(a,0)$ בת־בנייה. מספר מרוכב $a + ib \in \mathbb{C}$ ניתן לבנייה אם a ו-b ניתנים לבנייה.

מסתבר שאת כל השאלות האלה אפשר לתרגם לשאלה לגבי האם מספרים ניתנים לבנייה. למשל אפשר להוכיח שמצולע משוכלל עם n צלעות ניתן לבנייה אם ורק אם $\cos\frac{2\pi}{n}$ הוא בר־בנייה. שימו לב כי $\cos\alpha$ בר־בנייה אם ורק אם $\sin\alpha$ בר־בנייה אם ורק אם $e^{i\alpha}$ בר־בנייה. אנו נאפיין מספרים בני־בנייה בהמשך הקורס.

תרגיל 2.2. יהיו P, Q נקודות נתונות. בנה את נקודת אמצע הקטע.

פתרון. נשרטט מעגל שמרכזו ב-P ורדיוסו באורך PQ. נשרטט מעגל שמרכזו ב-Q ורדיוסו באורך PQ. מעגלים אלו נחתכים בשתי נקודות A, B. כעת נעביר את הקו הישר AB. החיתוך של AB עם הישר PQ זו הנקודה הדרושה.

תרגיל 2.3. נניח כי a, b בני־בנייה. הראו כי $a + b$ בר־בנייה.

פתרון. ניקח מעגל ברדיוס b שמרכזו ב-(a,b). הוא חותך את ציר ה-x ב-$(a+b,0)$.

תרגיל 2.4. יהי $a > 0$ מספר בר־בנייה. הוכיחו כי $\sqrt{a}$ בר־בנייה.

פתרון. בהרצאה ראיתם שהמספרים בני־הבנייה סגורים לחיבור, נגדי וכפל במספר רציונלי. לכן גם $\frac{a+1}{2}$ ו-$\frac{|a-1|}{2}$ בני־בנייה. נעביר מעגל שמרכזו ב-$A = \left(\frac{|a-1|}{2}, 0\right)$ ברדיוס $\frac{a+1}{2}$. נסמן נקודת חיתוך של המעגל עם ציר ה-y ב-B וכן את $O = (0,0)$. המשולש AOB הוא ישר זווית ולפי משפט פיתגורס אורך הצלע OB היא

$$\sqrt{\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{|a-1|}{2}\right)^2} = \sqrt{a}$$

המספרים בני־הבנייה סגורים לחיבור, כפל, הופכי (שונה מאפס) והוצאת שורש ריבועי. למעשה הם מהווים תת־שדה של המרוכבים, שהוא תת־השדה הקטן ביותר של המרוכבים הכולל את i עם התכונה של הוצאת שורש ריבועי.

2.2 תזכורת נוספת מתורת החוגים

עד סוף התרגול נעשה תרגילים שיכינו אותנו להמשך הקורס.

תרגיל 2.5. מצאו את הממ"מ (gcd) מעל $\mathbb{Q}$ של הפולינומים $f(x) = x^2 - x - 3$ ו-$g(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

פתרון. נשתמש באלגוריתם אוקלידס (שעובד בתחום האוקלידי $\mathbb{Q}[x]$). נבצע חלוקה עם שארית:

$$x^3 - 2x^2 + 1 = (x^2 - x - 3)(x - 1) + 2x - 2$$
$$x^2 - x - 3 = (2x - 2)\frac{1}{2}x - 3$$

קיבלנו בסוף -3, שהוא הפיך. לכן $\gcd(f(x), g(x)) = 1$, כלומר הם זרים.

תרגיל 2.6. בהמשך לתרגיל הקודם. בטאו את ה gcd כצירוף לינארי של $f(x), g(x)$.

פתרון. זה אלגוריתם אוקלידס המורחב. נבצע הצבה לאחור

$$-\frac{1}{3}(x^2 - x - 3) + (2x - 2)\frac{1}{6}x = 1$$
$$-\frac{1}{3}(x^2 - x - 3) + (x^3 - 2x^2 + 1 - (x^2 - x - 3)(x - 1))\frac{1}{6}x = 1$$

כלומר

$$\frac{1}{6}x(x^3 - 2x^2 + 1) - (\frac{1}{6}x(x - 1) + \frac{1}{3})(x^2 - x - 3) = 1$$

תרגיל 2.7. חשבו את ההופכי של $x^3 - 2x^2 + 1$ בשדה $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - x - 3\rangle$.

פתרון. ראשית נזכור שהאיברים בשדה הם מהצורה
$$f(x)+\langle x^2-x-3\rangle$$
כלומר הכל עובד "עד כדי" חיבור כפולה של x^2-x-3. לפי התרגילים הקודמים
$$x^3-2x^2+1+\langle x^2-x-3\rangle=2x-2+\langle x^2-x-3\rangle$$
וההופכי הוא
$$\frac{1}{6}x+\langle x^2-x-3\rangle$$

3 תרגול שלישי

3.1 הרחבת שדות

הגדרה 3.1. יהי $F\subseteq K$ תת־שדה של K. במקרה זה נאמר כי K הוא הרחבה של F ונסמן זאת K/F. כן, זה אותו סימון של חוג מנה, אבל אנחנו לא נתבלבל בינהם כי שדה הוא חוג פשוט ומכאן שחוגי המנה שלו לא מעניינים.

אם ישנה שרשרת של שדות $F\subseteq L\subseteq K$ נאמר כי L הוא שדה ביניים של ההרחבה K/F.

תזכורת 3.2. תהי K/F הרחבת שדות ויהי $a\in K$. הסיפוח של a ל-F הוא תת־השדה (של K) הקטן ביותר שמכיל את F ואת a. נסמן אותו $F(a)$. הרחבה כזו, באיבר אחד, נקראת גם הרחבה פשוטה.

בדרך אחרת, השדה $F(a)$ הוא החיתוך של כל תת־השדות שמכילים גם את F וגם את a. חשוב להדגיש את התכונה הפשוטה (אך חשובה) הבאה: אם L שדה ביניים המכיל את a אז $F(a)\subseteq L$. נדגיש כי $F(a)=F$ אם ורק אם $a\in F$.

דוגמה 3.3. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$. הסבר: צריך רק לוודא שהוא סגור לכפל לחיבור ולהופכי ואז זה תת־שדה של $\mathbb{R}$. מצד שני, ברור שכל שדה שמכיל את $\mathbb{Q}$ ו-$\sqrt{2}$ מכיל גם את השדה מסגירות לחיבור ולכפל. שימו לב כי $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ מפני ש-$\left(\sqrt{2}\right)^{-1}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

תרגיל 3.4. הוכיחו כי $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

פתרון. נניח בשלילה ש-$\sqrt{6}\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. אז קיימים $a,b\in\mathbb{Q}$ עבורם
$$\sqrt{6}=a+b\sqrt{2}$$
לא ייתכן ש-$b=0$ כי $\sqrt{6}$ לא רציונלי, ולא ייתכן ש-$a=0$ כי $\sqrt{3}$ לא רציונלי. נעלה משוואה זו בריבוע ונקבל
$$6=a^2+2\sqrt{2}ab+2b^2$$
כלומר
$$\sqrt{2}=\frac{6-a^2-2b^2}{2ab}$$
מותר לחלק כי כבר הוכחנו $ab\neq 0$. קיבלנו ש-$\sqrt{2}$ רציונלי, וזו סתירה.

הערה 3.5. כמו שאפשר לספח איבר אחד, אפשר לספח קבוצת איברים, והעיקרון דומה.

תרגיל 3.6. האם $\sqrt{2}i \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}+i]$?

פתרון. על פניו אפשר לחשוד שלא, כמו בתרגיל הקודם. אבל בעצם

$$(\sqrt{2}+i)^2 = 2+2\sqrt{2}i-1 = 1+2\sqrt{2}i$$

נחסר 1 ונחלק ב-2 (פעולות שמשאירות אותנו בתוך השדה) ונקבל כי

$$\sqrt{2}i \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}+i]$$

הגדרה 3.7. תהי K/F הרחבת שדות. בפרט K הוא מרחב וקטורי מעל F. הממד של K/F הוא הממד של K מעל F ומסמנים אותו $[K:F]=\dim_F K$. לא להתבלבל עם הסימון הזהה של אינדקס שראינו בתורת החבורות.

דוגמה 3.8. לכל שדה F מתקיים $[K:F]=1$ אם ורק אם $K=F$.

דוגמה 3.9. $[\mathbb{C}:\mathbb{R}]=2$, $[\mathbb{R}:\mathbb{Q}]=\infty$, $\left[\mathbb{Q}[\sqrt{2}]:\mathbb{Q}\right]=2$.

משפט 3.10. יהי פולינום אי פריק f מעל F עם שורש a, אז $\deg f = [F(a):F]$.

במילים אחרות, אם K/F הרחבת שדות ו-$a \in K$ אלגברי מעל F, אז

$$F[x]/\left\langle f(x)\right\rangle \cong F[a] \cong F(a)$$

כאשר $f(x)$ הוא פולינום מינימלי של a. שימו לב שאם $b \in K$ שורש אחר של $f(x)$, אז $f(x)$ הוא פולינום מינימלי גם של b ומתקיים $F[a]\cong F[b]$. גם הכיוון ההפוך נכון:

טענה 3.11. אם K/F הרחבת שדות כך ש-$K\cong F[a]$, אז $K=F[b]$ עבור איזשהו $b\in K$ שהוא שורש של פולינום מינימלי של a. זה כמובן לא אומר ש-$b\in F[a]$.

תזכורת 3.12 (כפליות הממד). אם $F\subseteq L\subseteq K$, אז

$$[K:L][L:F]=[K:F]$$

תרגיל 3.13. תהי $F\subseteq K$ הרחבת שדות ויהיו $a,b\in K\backslash F$. נניח כי

$$[F(a):F]=n, \quad [F(b):F]=m$$

הוכיחו כי $[F(a,b):F]\leq nm$.

פתרון. הנתון $[F(a):F]=n$ אומר לנו שהפולינום המינימלי $m_a\in F[x]$ של a מעל F הוא מדרגה n. אבל m_a הוא גם פולינום מעל $F(b)$ שמאפס את a. לכן הפולינום המינימלי של a מעל $F(b)$ מחלק את m_a ולכן הוא מדרגה קטנה (או שווה) ממנו. לכן

$$[F(a,b):F(b)]\leq n$$

ומכאן נקבל בעזרת כפליות הממד:

$$[F(a,b):F(b)]=[F(a,b):F(b)]\,[F(b):F]\leq nm$$

תרגיל 3.14. בהמשך לתרגיל הקודם, הראו שאם $(n,m)=1$ אז $[F(a,b):F]=nm$.

פתרון. נשים לב כי

$$[F(a,b):F]=[F(a,b):F(a)][F(a):F]=n[F(a,b):F(a)]$$

$$[F(a,b):F]=[F(a,b):F(b)][F(b):F]=m[F(a,b):F(b)]$$

כלומר $n,m \mid [F(a,b):F]$. לפי תורת המספרים האלמנטרית

$$nm=[n,m]\mid [F(a,b):F]$$

כי n,m זרים, ולכן $[F(a,b):F]=nm$.

דוגמה 3.15. $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{3}):\mathbb{Q}]=6$

שאלה 3.16. תהי $F(a)$ הרחבה של F ונניח ש-f הוא הפולינום המינימלי של a (מעל F). האם כל השורשים של f נמצאים ב-$F(a)$?

פתרון. לפעמים כן (למשל $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$) אבל זה לא תמיד קורה. למשל ניקח את $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. ברור כי $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\subseteq\mathbb{R}$ ושהפולינום המינימלי של $\sqrt[3]{2}$ הוא x^3-2, אבל שאר השורשים שלו הם מרוכבים ולכן לא נמצאים ב-$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

הערה 3.17. המצבים שבהם כן כל השורשים נמצאים בהרחבה הם חשובים ונדבר עליהם בהרחבה בהמשך הקורס.

תרגיל 3.18. נתון כי הפולינום המינימלי של a (מעל $\mathbb{Q}$) הוא $x^3-6x^2+9x+11$ מצאו את הפולינום המינימלי של $\frac{1}{a}$.

פתרון. נציב a בפולינום ונשים לב כי

$$a^3-6a^2+9a+11=0$$

ולכן

$$1-\frac{6}{a}+\frac{9}{a^2}+\frac{11}{a^3}=0$$

כלומר הפולינום $11x^3+9x-6x+1$ מאפס את $\frac{1}{a}$. אין לפולינום שורשים ב-$\mathbb{Q}$ (אם b היה שורש אז $\frac{1}{b}$ שורש של הפולינום המקורי בסתירה לאי פריקות). לכן הוא הפולינום המינימלי (צריך לחלק ב 11 כדי להפוך אותו למתוקן).

4 תרגול רביעי

4.1 שורשי יחידה

הגדרה 4.1. יהי F שדה. איבר $\rho\in F$ נקרא שורש יחידה פרימיטיבי מדרגה n אם הסדר (הכפלי) שלו הוא n. כלומר $\rho^n=1$ וגם $\rho^i\neq 1$ לכל $1\le i<n$.

דוגמה 4.2. ב-$\mathbb{C}$ לכל $n \in \mathbb{N}$ יש שורש יחידה פרמיטיבי, למשל $\rho_n = e^{2\pi i/n}$.

הערה 4.3. אם ρ שורש יחידה פרימיטיבי מדרגה n, אז ρ^k הוא שורש יחידה פרימיטיבי מדרגה n אם ורק אם $(n,k) = 1$.

תרגיל 4.4. יהי $\rho \in F$ שורש יחידה פרמיטיבי מדרגה n. הוכיחו כי $1, \rho, \dots, \rho^{n-1}$ כולם שונים זה מזה, והראו כי

$$x^n - 1 = \prod_{i=1}^{n} \left(x - \rho^i\right)$$

פתרון. נניח כי $\rho^i = \rho^j$ כאשר $i \leq j$. אז $\rho^{j-i} = 1$. אבל $0 \leq j - i < n$, ולכן בהכרח $j = i$, כי ρ הוא שורש יחידה פרמיטיבי מדרגה n.

נשים לב ש-ρ^i הוא שורש של $x^n - 1$ לכל i. מכיוון שהם שונים, אלו הם כל השורשים של $x^n - 1$, כי זה פולינום מעל שדה מדרגה n. לכן $x^n - 1 = \prod_{i=1}^{n} \left(x - \rho^i\right)$.

דוגמה 4.5. יהי ρ שורש יחידה פרימיטיבי מדרגה n. אז

$$\mathbb{Q}(\rho) = \left\{a_0 + a_1\rho \cdots + a_{n-1}\rho^{n-1} \,\middle|\, a_i \in \mathbb{Q}\right\}$$

דוגמה 4.6. יהי p ראשוני ויהי ρ_p שורש יחידה פרמיטיבי מדרגה p. אז הוא בוודאי מאפס את $x^p - 1$. נחפש גורם אי פריק של פולינום זה:

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + \cdots + x + 1$$

שהוא הפולינום המינימלי של ρ_p כי למזלנו פתרנו את תרגילי הבית בתורת החוגים שבהם הוכחנו שהוא אי פריק. לכן $[\mathbb{Q}(\rho_p) : \mathbb{Q}] = p - 1$.

תרגיל 4.7. נסמן $\rho = e^{\frac{\pi i}{6}}$, שהוא שורש יחידה פרמיטיבי מדרגה 12. הוכיחו כי

$$\mathbb{Q}(\rho) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$$

פתרון. נשים לב ש $\rho = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. אז ברור ש-$\mathbb{Q}(\rho) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$. מצד שני $\rho^3 = i$ ולכן $i \in \mathbb{Q}(\rho)$ וגם

$$\sqrt{3} = 2(\rho - \frac{i}{2}) \in \mathbb{Q}(\rho)$$

ולכן יש שוויון.

תרגיל 4.8. בהמשך לתרגיל הקודם, חשבו את $[\mathbb{Q}(\rho) : \mathbb{Q}]$.

פתרון. קל לראות ש-$[\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 2$ וש-$[\mathbb{Q}(i, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] = 2$ ולכן

$$[\mathbb{Q}(\rho) : \mathbb{Q}] = 4$$

תרגיל 4.9. בהמשך לתרגיל הקודם, מצאו פולינום מינימלי של ρ.

פתרון. אנחנו יודעים כי $\rho^{12}=1$. כלומר מדובר בשורש של $x^{12}-1$. אבל זה כמובן פריק. נתחיל לפרק

$$x^{12}-1=(x^6-1)(x^6+1)$$

ונשים לב כי ρ שורש של x^6+1. לפי הנוסחה $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ נקבל

$$x^6+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$$

מפני ש-ρ אינו שורש של x^2+1, אז הוא צריך להיות שורש של x^4-x^2+1. זה פולינום אי פריק כי אנחנו כבר יודעים ש-$[\mathbb{Q}(\rho):\mathbb{Q}]=4$. למעשה יש לנו דרך חדשה להוכיח שפולינום הוא אי פריק.

הערה 4.10. בהמשך הקורס נלמד על הפירוק המלא של x^n-1.

4.2 שדות פיצול

הגדרה 4.11. יהי $f\in F[x]$. הפולינום f מתפצל ב-F אם הוא מכפלה של גורמים לינאריים. אם f מתפצל בהרחבת שדות E/F, נאמר ש-E הוא שדה מפצל של f.

דוגמה 4.12. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ מפצל את x^2-2 מעל $\mathbb{Q}$. באופן דומה $\mathbb{Q}[\sqrt{\Delta}]$ מפצל את ax^2+bx+c כאשר Δ היא הדיסקרימיננטה. אפשר לפצל כמה פולינומים בבת אחת, למשל $\mathbb{C}$ הוא שדה מפצל של כל פולינום מעל $\mathbb{Q}$.

הגדרה 4.13. יהי $f\in F[x]$. נאמר ש-E/F הוא שדה פיצול של f אם הוא שדה מפצל מינימלי. כלומר אין שדה ביניים (לא טריוויאלי) שהוא שדה מפצל.

משפט 4.14. יהי $f\in F[x]$. כל שדות הפיצול של f מעל F איזומורפיים.

תרגיל 4.15. מצאו את שדה הפיצול של x^5-2 מעל $\mathbb{Q}$ ואת הממד שלו.

פתרון. נסמן $\rho=e^{2\pi i/5}$. אז השורשים של הפולינום הם

$$\sqrt[5]{2},\sqrt[5]{2}\rho,\ldots,\sqrt[5]{2}\rho^4$$

ולכן שדה הפיצול הוא $E=\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2},\sqrt[5]{2}\rho,\ldots,\sqrt[5]{2}\rho^4)$. קל לבדוק כי

$$\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2},\sqrt[5]{2}\rho,\ldots,\sqrt[5]{2}\rho^4)=\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2},\rho)$$

וקל לחשב $[\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}):\mathbb{Q}]=5$. כמו כן, נשים לב כי x^5-1 מאפס את ρ. אבל הפולינום הזה אינו הפולינום המינימלי כי הוא פריק. אנחנו כבר יודעים כי

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

ושהגורם $x^4+x^3+x^2+x+1$ הוא אי פריק. לכן $[\mathbb{Q}(\rho):\mathbb{Q}]=4$. מפני ש-$\gcd(4,5)=1$, אז לפי תרגיל משבוע שעבר (או מתרגיל הבית), נקבל $[E:\mathbb{Q}]=20$.

תרגיל 4.16. מצאו את שדה הפיצול של x^4-4x^2-1 מעל $\mathbb{Q}$.

פתרון. צריך בסך הכל למצוא את השורשים. מציבים $t=x^2$ ופותרים. מגלים שהשורשים הם
$$\pm\sqrt{2+\sqrt{5}},\pm\sqrt{2-\sqrt{5}}$$
ולכן שדה הפיצול הוא $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}},\sqrt{2-\sqrt{5}})$.

תרגיל 4.17. הוכיחו כי $f(x)=x^4-4x^2-1$ הוא אי פריק מעל $\mathbb{Q}$.

פתרון. דרך א': ברור של-$f(x)$ אין שורשים ב-$\mathbb{Q}$ (כי מצאנו את השורשים). אז נשאר לוודא שהוא לא מתפרק למכפלת פולינומים ממעלה 2. אבל אנחנו כבר יודעים
$$x^4-4x^2-1=(x-\sqrt{2+\sqrt{5}})(x+\sqrt{2+\sqrt{5}})(x-\sqrt{2-\sqrt{5}})(x+\sqrt{2-\sqrt{5}})$$
וקל לבדוק שכל מכפלה של שני גורמים מכאן אינה פולינום מעל $\mathbb{Q}$.

דרך ב': כמו בתרגיל הבית מוכיחים ש-$[\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}}):\mathbb{Q}]=4$. לכן הפולינום המינימלי של $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ הוא ממעלה 4, לכן x^4-4x^2-1 מינימלי ולכן אי פריק.

תרגיל 4.18. כמה תת־שדות יש ל-$\mathbb{C}$ שאיזומורפיים ל-$\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})$?

פתרון. אם $K\subseteq\mathbb{C}$ הוא שדה ויש $\varphi\colon\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})\to K$ איזומורפיזם, אז φ מקבע את $\mathbb{Q}$. כמו כן $\varphi(\sqrt{2+\sqrt{5}})$ בהכרח נשלח לשורש של x^4-4x^2-1 שזה פולינום עם 4 שורשים (שונים) בסך הכל. מכאן מסיקים שכל אחד מבין
$$\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}}),\mathbb{Q}(-\sqrt{2+\sqrt{5}}),\mathbb{Q}(\sqrt{2-\sqrt{5}}),\mathbb{Q}(-\sqrt{2-\sqrt{5}})$$
מוכל ב-K. לכן הוא צריך להיות שווה ל-K משיקולי ממד. כעת נשים לב שהשניים הימניים והשמאליים למעשה שווים. אז יש רק שני תת־שדות והם $\mathbb{Q}(\sqrt{2-\sqrt{5}})$ ו-$\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})$. אלו שדות איזומורפיים אבל שונים, כי אחד מרוכב והשני ממשי.

תרגיל 4.19. נסמן $E=\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}},\sqrt{2-\sqrt{5}})$. חשבו את הממד שלו מעל $\mathbb{Q}$.

פתרון. כבר ראינו $[\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}}):\mathbb{Q}]=4$, ונשאר לבדוק מהו $[E:\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})]$. ברור שזה לא 1 כי
$$\sqrt{2-\sqrt{5}}\notin\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})$$
שהוא מספר מרוכב ואילו $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})$ ממשי. מצד שני, נשים לב ש-$\sqrt{5}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})$ ולכן
$$x^2-2+\sqrt{5}$$
פולינום מאפס של $\sqrt{2-\sqrt{5}}$ מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})$. לכן $[E:\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})]=2$ וקיבלנו ש-$[E:\mathbb{Q}]=8$.

תרגיל 4.20. יהי F שדה ממאפיין p. נתבונן בפולינום $f(x) = x^p - x - a$. יהי α שורש של $f(x)$. מצאו את שדה הפיצול של α מעל F.

פתרון. נשים לב כי לכל $k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ מתקיים

$$f(\alpha + k) = (\alpha + k)^p - (\alpha + k) - a = \alpha^p + k^p - \alpha - k - a = 0$$

מפני ש-$(\alpha + k)^p = \alpha^p + k^p$. כלומר $\{\alpha + k\}_{k=0}^{p-1}$ הם כל השורשים של f, כי הוא מדרגה p. לכן שדה הפיצול הוא

$$F[\alpha] = F[\alpha, \alpha + 1, \ldots, \alpha + p - 1]$$

טענה 4.21. לכל פולינום $f \in F[x]$ יש שדה מפצל שממדו אינו עולה על $(\deg f)!$.

דוגמה 4.22. בתרגיל 4.20, אם $f(x)$ אי פריק, אז $[F[\alpha] : F] = p$ וזה יכול להיות ממש קטן מ-$p!$.

5 תרגול חמישי

5.1 פולינומים ספרביליים

הגדרה 5.1. פולינום $f(x)$ המתפצל בשדה E נקרא ספרבילי (פריד) אם בפירוק שלו אין גורם כפול מן הצורה $(x - \alpha)^2$. בצורה פחות מדוייקת, אפשר לומר שכל השורשים של $f(x)$ שונים זה מזה בשדה הפיצול שלו, ולמעשה אין תלות ב-E.

דוגמה 5.2. נתבונן ב-$F = \mathbb{F}_2(t)$ שהוא שדה השברים של החוג $\mathbb{F}_2[t]$. הפולינום $f(x) = x^2 - t$ הוא אי פריק ואי ספרבילי. רואים זאת לפי החישוב

$$x^2 - t = (x - \sqrt{t})(x + \sqrt{t}) = (x + \sqrt{t})^2$$

כי השדה הוא ממאפיין 2, והוא אי פריק כי $\sqrt{t} \notin F$.

הערה 5.3. דרך אפקטיבית לזהות פולינום ספרבילי היא לפי הקריטריון: $f(x)$ ספרבילי אם ורק אם $\gcd(f(x), f'(x)) = 1$.

בפרט, אם $f(x)$ אי פריק, אז הוא ספרבילי אם ורק אם $f' \neq 0$.

תרגיל 5.4. האם הפולינום $x^4 - 8x + 16 \in \mathbb{Q}[x]$ ספרבילי?

פתרון. הנגזרת היא $4x^3 - 8$. צריך לבדוק האם הם זרים. נשתמש באלגוריתם אוקלידס כאשר קודם נחלק ב-4 (שהוא הפיך) ונמשיך עם $x^3 - 2$:

$$x^4 - 8x + 16 = x(x^3 - 2) - 6x + 16$$

נחלק ב--6 ונמשיך עם $x - \frac{8}{3}$:

$$(x^3 - 2) = (x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{64}{9})(x - \frac{8}{3}) + \frac{512}{27}$$

ולכן הפולינום זרים. כלומר הפולינום $x^4 - 8x + 16$ ספרבילי.

תרגיל 5.5. האם הפולינום $x^4 - 8x^2 + 16$ ספרבילי?

פתרון. קל לפתור על ידי חישוב השורשים ישירות, אבל נשתמש בנגזרת במקום. הנגזרת היא $4x^3 - 16x$ ונשתמש באלגוריתם אוקלידס עם $x^3 - 4x$. נחשב

$$x^4 - 8x^2 + 16 = x(x^3 - 4x) - 4x^2 + 16$$

ומפני ש-$x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$, כלומר לפולינום ולנגזרתו יש גורם משותף $x^2 - 4$, נקבל כי $x^2 - 4x^2 + 16$ לא ספרבילי.

הגדרה 5.6. הרחבת שדות K/F תקרא ספרבילית (פרידה) אם הפולינום המינימלי של כל $a \in K$ מעל F הוא ספרבילי.

דוגמה 5.7. אם F שדה ממאפיין $p > 0$, אז $F(t)/F$ אינה ספרבילית כי $x^p - t$ לא ספרבילי.

תרגיל 5.8. תהי K/F הרחבת שדות ספרבילית, ויהי L שדה ביניים. הוכיחו כי גם L/F וגם K/L ספרביליות.

פתרון. ברור ש-L/F ספרבילית, כי כל איבר ב-L הוא איבר של K. עבור K/L, יהי $a \in K$ ויהי $m_{a,F}$ הפולינום המינימלי של a מעל F. אז $m_{a,L}|m_{a,F}$ ולכן ל-$m_{a,L}$ אין שורשים כפולים. לכן K/L ספרבילית.

6 תרגול שישי

תרגיל 6.1. יהיו $f, g\colon F(a_1, \ldots, a_n) \to K$ שני הומומורפיזמים שמקיימים

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \quad \forall x \in F \\ f(a_i) &= g(a_i) \quad 1 \le i \le n \end{aligned}$$

הוכיחו כי $f = g$.

פתרון. הקבוצה $\{x \in F(a_1, \ldots, a_n) \mid f(x) = g(x)\}$ היא תת־שדה של $F(a_1, \ldots, a_n)$ (קל לבדוק) והיא מכילה את $F, a_1, \ldots, a_n$. לכן היא כל $F(a_1, \ldots, a_n)$, ונסיק $f = g$.

הגדרה 6.2. תהי K/F הרחבת שדות, ויהי $\varphi\colon F \to E$ שיכון (למה כל הומומורפיזם של שדות הוא שיכון?). שיכון $\overline{\varphi}\colon K \to E$ נקרא המשכה של φ אם הצמצום של $\overline{\varphi}$ ל-F שווה ל-φ.

תרגיל 6.3. תהי K/F הרחבת שדות. יהי $g(x) \in F[x]$ אי פריק ויהיו a, b שני שורשים של g. הוכיחו כי יש איזומורפיזם

$$f\colon F(a) \to F(b)$$

המקיים כי $f(a) = b$ וכן $f(\alpha) = \alpha$ לכל $\alpha \in F$.

פתרון. נסתכל על העתקת ההכלה $i : F \hookrightarrow F(b)$. אפשר להרחיב אותה להעתקה

$$\hat{i} \colon F[x] \to F(b)$$

כך ש-$f(x) = b$ לפי הגדרת פולינומים. כמובן שכעת זו העתקה על. נשים לב שהגרעין הוא $\langle g(x) \rangle$ (כי $g(x)$ פולינום מינימלי של a). לפי משפט האיזומורפיזם הראשון

$$f \colon F[x]/\langle g(x) \rangle \to F(b)$$

הוא איזומורפיזם ובאופן דומה ניתן לבנות איזומורפיזם $g \colon F[x]/\langle g(x) \rangle \to F(a)$. האיזומורפיזם שאנחנו מחפשים הוא gf^{-1}.

תזכורת 6.4. תהי K/F הרחבת שדות ויהיו $a, b \in K$ איברים עם פולינומים מינימליים m_a, m_b מעל F, בהתאמה. נסמן ב-E_a, E_b את שדות הפיצול של m_a, m_b. אז כל איזומורפיזם

$$f \colon F(a) \to F(b)$$

שמקבע את איברי F (כלומר $f(\alpha) = \alpha$ לכל $\alpha \in F$) ניתן להרחיב לאיזומורפיזם $f \colon E_a \to E_b$.

תרגיל 6.5. יהי $g(x) \in F[x]$ פולינום אי פריק עם שדה פיצול E. ויהיו a, b שני שורשים של $g(x)$. הוכיחו כי יש איזומורפיזם $f \colon E \to E$ שמקבע את איברי F ומקיים $f(a) = b$.

פתרון. לפי תרגיל קודם יש איזומורפיזם $f \colon F(a) \to F(b)$ שמקבע את איברי F ושולח $f(a) = b$ לפי התזכורת אפשר להרחיב אותו לכל E.

הגדרה 6.6. אם $F, L \subseteq K$, אז הקומפוזיטום של F ו-L הוא תת־השדה המינימלי שמכיל את F, L ומסומן בדרך כלל FL או $F \vee L$.

תרגיל 6.7. יהיו $F \subseteq K \subseteq E$ שדות כך ש-E שדה פיצול של פולינום $f(x) \in E[x]$ כלשהו ו-K מכיל שורש a של $f(x)$. הוכיחו כי ניתן למצוא $K_1, \ldots, K_r$ תת־שדות של E שכולם איזומורפיים ל-K כך שמתקיים

$$E = K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_r$$

פתרון. נסמן ב-$b_1, \ldots, b_k$ את שורשי F. ראינו כבר שיש איזומורפיזמים

$$f_i \colon F(a) \to F(b_i)$$

ואפשר להרחיב אותם $f_i \colon E \to E$. נסמן $K_i = f_i(K)$ לכל i. אז כמובן $K_i \cong K$, ולכל i מתקיים $K_i \subseteq E$ ולכן

$$K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_r \subseteq E$$

מצד שני כל השורשים של F שייכים ל-$K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_r$ ולכן $E \subseteq B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_k$, כדרוש.

6.1 חבורת גלואה

הגדרה 6.8. אוטומורפיזם של הרחבת שדות K/F הוא אוטומורפיזם $\varphi\colon K \to K$ המקבע את איברי F. כלומר $\varphi(a) = a$ לכל $a \in F$. באופן שקול, זו העתקה לינארית של מרחבים וקטוריים מעל F.

דוגמה 6.9. כל אנדומורפיזם $\varphi \in \mathrm{End}(K)$ הוא אוטומורפיזם של ההרחבה K מעל תת־השדה הראשוני של K.

הגדרה 6.10. תהי K/F הרחבת שדות. חבורת גלואה של ההרחבה היא החבורה $\mathrm{Gal}(K/F)$ של כל האוטומורפיזמים של K/F עם פעולת ההרכבה. זו תת־חבורה של $\mathrm{Aut}(K)$.

סימונים נוספים עבור $\mathrm{Gal}(K/F)$ הם $G(K/F)$, $G_{K/F}$ ו-$\mathrm{Aut}(K/F)$.

הדבר המרכזי שנעשה בקורס הזה הוא (לנסות) ללמוד הרחבות שדות באמצעות חבורות גלואה.

דוגמה 6.11. תהי $F/\mathbb{Q}$ הרחבת שדות. אז $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ היא למעשה $\mathrm{Aut}(F)$, לפי דוגמה 6.9. למשל ראינו (כנראה בתורת החוגים) כי $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \cong \mathbb{Z}_2$ ולכן זו חבורת גלואה של ההרחבה $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$.

באופן דומה $\mathrm{Gal}(\mathbb{R}/\mathbb{Q}) = \{\mathrm{id}\}$ כי כל אוטומורפיזם של $\mathbb{R}$ מעביר מספר חיובי למספר חיובי (כי $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$), ומכאן שהוא שומר על יחס הסדר ב-$\mathbb{R}$. לכן כל אוטומורפיזם של $\mathbb{R}$ הוא העתקת הזהות.

תרגיל 6.12 (בהרצאה)**.** יהי $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$ ויהי $f(x) \in F[x]$. הוכיחו שלכל שורש $a \in K$ של f, גם $\sigma(a)$ הוא שורש.

פתרון. אם $f(x) = c_0x^n + \ldots + c_n$, אז

$$c_0a^n + \ldots + c_n = 0$$

מפעילים σ על המשוואה הזו ומקבלים את הדרוש כי σ מקבע את כל המקדמים.

7 תרגול שביעי

7.1 חישוב חבורות גלואה

תרגיל 7.1. חשבו את $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})/\mathbb{Q})$.

פתרון. נסמן $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ ונשים לב שזהו שדה הפיצול של $(x^2-2)(x^2-3)$. כל אוטומורפיזם של E נקבע לחלוטין לפי תמונות $\sqrt{2}$ ו-$\sqrt{3}$. שימו לב כי $\sqrt{2}$ חייב להשלח לשורשים של הפולינום המינימלי שלו x^2-2 שהם $\pm\sqrt{2}$. הפולינום המינימלי של $\sqrt{3}$ מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ הוא עדין x^2-3 ולכן $\sqrt{3}$ ישלח ל-$\pm\sqrt{3}$. ישנם ארבעה שורשים שנזהה אותם עם המספרים

$$1 \to \sqrt{2}, \quad 2 \to -\sqrt{2}, \quad 3 \to \sqrt{3}, \quad 4 \to -\sqrt{3}$$

ונוכל לשכן את $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ ב-S_4 בעזרת זיהוי זה. ישנן ארבע אפשרויות:

האוטומורפיזם $\mathrm{id}\in\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ השולח כל שורש לעצמו. הוא מתאים לתמורת הזהות $\mathrm{id}\in S_4$.

האוטומורפיזם השולח $\sqrt{2}\mapsto-\sqrt{2}$ ו-$\sqrt{3}\mapsto\sqrt{3}$ מתאים לתמורה $(1\ 2)$.

האוטומורפיזם השולח $\sqrt{2}\mapsto\sqrt{2}$ ו-$\sqrt{3}\mapsto-\sqrt{3}$ מתאים לתמורה $(3\ 4)$.

האוטומורפיזם השולח $\sqrt{2}\mapsto-\sqrt{2}$ ו-$\sqrt{3}\mapsto-\sqrt{3}$ מתאים לתמורה $(1\ 2)(3\ 4)$.

בסך הכל $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})\cong V\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ כאשר V היא חבורת הארבעה של קליין. לצורך חינוכי עתידי נשים לב כי סריג תת־החבורות של V הוא

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & V \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \langle(1\ 2)\rangle \arrow[dr, dash] & \langle(1\ 2)(3\ 4)\rangle \arrow[d, dash] & \langle(3\ 4)\rangle \arrow[dl, dash] \\ & \{\mathrm{id}\} & \end{tikzcd}$$

ואילו סריג תת־השדות של E הוא

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt{2}\sqrt{3}) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[dl, dash] \\ & \mathbb{Q} & \end{tikzcd}$$

תרגיל 7.2. חשבו את $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$.

פתרון (בהרצאה). הפולינום המינימלי של $\sqrt[3]{2}$ הוא x^3-2. יהי $\varphi\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$. גם $\varphi(\sqrt[3]{2})$ הוא גם שורש של x^3-2. אבל $\varphi(\sqrt[3]{2})$ הוא מספר ממשי ולכן בהכרח $\varphi(\sqrt[3]{2})=\sqrt[3]{2}$. למה זה שימושי? כעת נשתמש בטענה שכבר הוכחנו בעבר. אם

$$\varphi,\psi\colon F(a_1,\dots,a_n)\to F(a_1,\dots,a_n)$$

הם הומומורפיזמים שמסכימים על F ועל האיברים $\{a_1,\dots,a_n\}$, אז $\varphi=\psi$. במונחים החדשים, המשמעות היא ששני איברים בחבורת גלואה של $F(a_1,\dots,a_n)/F$ שמסכימים על $\{a_1,\dots,a_n\}$ הם שווים. במקרה שלנו, מפני ש-$\varphi(\sqrt[3]{2})=\mathrm{id}(\sqrt[3]{2})$ נקבל ש-$\varphi=\mathrm{id}$, ולכן $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})=\{\mathrm{id}\}$ היא החבורה הטריוויאלית.

תרגיל 7.3. חשבו את $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\rho)/\mathbb{Q})$ כאשר ρ הוא שורש יחידה פרימיטבי מסדר 3.

פתרון. מפני ש-$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\rho)$ ו-$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ הן הרחבות איזומורפיות של $\mathbb{Q}$, אז גם כאן חבורת גלואה היא טריוויאלית.

תרגיל 7.4. חשבו את $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$.

פתרון. הפולינום המינימלי של $\sqrt[4]{2}$ מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ הוא כמובן $x^2-\sqrt{2}$. אם φ בחבורת גלואה, אז לפי מה שראינו קודם $\varphi(\sqrt[4]{2})=\pm\sqrt[4]{2}$. אם $\varphi(\sqrt[4]{2})=\sqrt[4]{2}$, אז כבר הסקנו כי $\varphi=\mathrm{id}$ שהוא בוודאי איבר בחבורת גלואה.

עבור האפשרות $\varphi(\sqrt[4]{2})=-\sqrt[4]{2}$ צריך להזהר! בשלב הזה אנחנו לא יודעים בכלל אם קיימת φ שמקיימת את הנ"ל. השוו לתרגיל הקודם בו גילינו עם שיקול הממשיות שאין φ המקיימת $\varphi(\sqrt[3]{2})=\sqrt[3]{2}\rho$. מפני שזו בסך הכל הרחבה מסדר 2 אנחנו יודעים שאפשר לכתוב איברים של $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ בצורה $a+b\sqrt[4]{2}$ כאשר $a,b\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. אם אכן קיימת φ כזו, אז בהכרח מתקיים

$$\varphi(a+b\sqrt[4]{2})=a-b\sqrt[4]{2}$$

ניתן לבדוק את כל הדרישות ולראות שזה אכן אוטומורפיזם המקבע את $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. לכן בחבורת גלואה יש שני איברים בדיוק, ויש רק חבורה אחת (עד כדי איזומורפיזם) בעלת שני איברים והיא $\mathbb{Z}_2$.

כמו שניתן לראות, אפילו בדוגמאות פשוטות לא ממש קל לראות מה היא חבורת גלואה. אנחנו צריכים כלים יותר מתוחכמים. נתחיל ממשהו שכבר הוכחנו: לפי תרגיל 6.5 אם $g(x)\in F[x]$ פולינום אי פריק עם שדה פיצול E ו-a,b הם שני שורשים של $g(x)$, אז יש איזומורפיזם $f\colon E\to E$ שמקבע את איברי F ומקיים $f(a)=b$. בשפה עדכנית קיים $\varphi\in\mathrm{Gal}(E/F)$ כך ש-$\varphi(a)=b$.

עם הטענה הזאת אפשר לפשט את הפתרון של השאלה הקודמת, מפני ש-$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ הוא שדה הפיצול של $x^2-\sqrt{2}$. היינו יכולים לדעת מייד שקיים φ כך ש-$\varphi(\sqrt[4]{2})=-\sqrt[4]{2}$ ולא היה צריך להתאמץ בשביל זה.

אזהרה! שימו לב שמשפט זה (ועוד אחרים שנראה) עובדים רק עבור חבורת גלואה של שדה פיצול. בדוגמה בחישוב $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ אין φ כך ש-$\varphi(\sqrt[3]{2})=\sqrt[3]{2}\rho$, ובאמת $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ אינו שדה הפיצול של x^3-2 (בהמשך הקורס נוכיח שהוא לא שדה פיצול של שום פולינום). כלי מועיל נוסף הוא המשפט הבא:

תרגיל 7.5. יהי $f(x)\in F[x]$ פולינום עם שדה פיצול E. נניח שהשורשים של f ב-E הם $a_1,\ldots,a_n$. הוכיחו כי $\mathrm{Gal}(E/F)$ משוכנת בתוך S_n.

פתרון (בהרצאה). תהי $\varphi\in\mathrm{Gal}(E/F)$. כבר ראינו שלכל i מתקיים

$$\varphi(a_i)\in\{a_1,\cdots,a_n\}$$

ולכן הצמצום של φ ל-$A=\{a_1,\cdots,a_n\}$ הוא פונקציה המוגדרת היטב. מפני ש-φ חד־חד ערכית, גם הצמצום שלה חד־חד ערכי. לכן יש לנו איבר של $S_A\cong S_n$, שנסמן אותו π_φ. כעת נותר להוכיח כי ההתאמה

$$\begin{aligned}\Phi\colon\ \mathrm{Gal}(E/F)&\to S_A\\ \varphi&\mapsto\pi_\varphi\end{aligned}$$

היא שיכון של חבורות. ראשית נשים לב שאם $\Phi(\varphi) = \pi_\varphi = \pi_{\varphi'} = \Phi(\varphi')$, אז φ ו-φ' מסכימים על כל שורשי הפולינום וראינו כבר ש-$\varphi = \varphi'$. כלומר Φ היא אכן חד־חד ערכית. נותר לבדוק שהיא הומומורפיזם, נשים לב כי

$$\Phi(\varphi\varphi') = \Phi(\varphi)\Phi(\varphi') = \pi_\varphi\pi_{\varphi'} = \pi_{\varphi\varphi'}$$

וקל לראות שמתקיים $\pi_\varphi\pi_{\varphi'} = \pi_{\varphi\varphi'}$. לא במקרה זה מזכיר את השיכון ממשפט קיילי.

הערה 7.6. את הטענה האחרונה אפשר לנסח גם בצורה הבאה: חבורת גלואה פועלת על קבוצת השורשים של $f(x)$. כל פעולה של חבורה על קבוצה מגדירה הומומורפיזם לחבורה סימטרית.

אם ל-$f(x)$ יש פירוק $f = f_1f_2\dots f_r$ ונסמן $K = F[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$ כאשר α_i הם כל השורשים של $f(x)$. כל אוטומורפיזם $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$ משרה תמורה על השורשים ויש שיכון

$$\mathrm{Gal}(K/F) \hookrightarrow S_{\deg f_1} \times S_{\deg f_2} \times \cdots \times S_{\deg f_r}$$

עכשיו נתחיל להשתמש בכלים שראינו ונפתור מקרה יותר מסובך.

תרגיל 7.7. חשבו את $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כאשר E הוא שדה הפיצול של הפולינום $x^3 - 2$.

פתרון (בהרצאה). ראשית נשים לב ששורשי הפולינום הם $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\rho, \sqrt[3]{2}\rho^3$ כאשר ρ שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 3. לכן חבורת גלואה היא תת־חבורה של S_3, וזה מידע משמעותי. קל לזהות שני איברים של חבורת גלואה: ברור שהעתקת הזהות id שם, וכך גם הומומורפיזם ההצמדה $z \mapsto \overline{z}$ הוא אוטומורפיזם של E (ששונה מ-id) ומקבע את $\mathbb{Q}$. נתבונן כיצד הצמדה פועלת על השורשים:

$$\sqrt[3]{2} \to \sqrt[3]{2}, \qquad \sqrt[3]{2}\rho \to \sqrt[3]{2}\rho^2, \qquad \sqrt[3]{2}\rho^2 \to \sqrt[3]{2}\rho$$

לכן היא מתאימה לתמורה $(2\ 3) \in S_3$ כאשר זיהינו את השורשים עם $1, 2, 3$. עכשיו נשים לב כי

$$E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \rho)$$

ולכן איברי החבורה נקבעים לפי התמונה שלהם ב-$\sqrt[3]{2}, \rho$. לפי משפט קודם, קיים אוטומורפיזם $\varphi \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ המקיים

$$\varphi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\rho$$

אבל לא ברור כל כך מה עושה לשאר השורשים. נשים לב שהפולינום המינימילי של ρ הוא $x^2 + x + 1$ והשורשים שלו הם ρ, ρ^2. לכן $\varphi(\rho) \in \{\rho, \rho^2\}$. נבדוק את שתי האפשרויות: אם $\varphi(\rho) = \rho$, אז התמורה ש-φ מבצעת על השורשים היא $(1, 2)$. כך שבחבורת גלואה יש גם את $(1\ 2)$ וגם את $(2\ 3)$ אבל שתי התמורות האלה יוצרות את כל S_3 ולכן $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong S_3$.

אם דווקא $\varphi(\rho) = \rho^2$ אז התמורה על השורשים יוצאת $(1\ 2\ 3\ 1)$. שוב, התמורות $(1\ 2\ 3), (2\ 3)$ יוצרות את כל S_3 ולכן גם באפשרות הזאת $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong S_3$.

נעיר שחבורת גלואה באמת מכילה את שתי האפשרויות שבחנו, אבל זה לא כל כך ברור. עצם העובדה ש-ρ, ρ^2 הם שורשים של פולינום לא מכריח שתהיה φ שמקיימת $\varphi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\rho$, וגם $\varphi(\rho) = \rho$ או $\varphi(\rho) = \rho^2$.

נמשיך עם תרגילים הנוגעים לחישוב חבורת גלואה. אבל קודם נזכיר כלים נוספים שראיתם בהרצאה.

טענה 7.8. לכל הרחבה סופית K/F מתקיים $|\operatorname{Gal}(K/F)| \leq [K:F]$.

תזכורת 7.9. הרחבת שדות K/F נקראת נורמלית אם K הוא שדה פיצול של פולינום כלשהו ב-F. תנאי שקול הוא שלכל $a \in K$ כל השורשים של הפולינום המינימלי של a מעל F שייכים ל-K.

דוגמה 7.10. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ היא דוגמה קלאסית להרחבה לא נורמלית וספרבילית כי לא כל השורשים של x^3-2 שייכים ב-$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. לעומת זאת $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ נורמלית וספרבילית כי $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ הוא שדה הפיצול של x^2-2.

ההרחבה $\mathbb{F}_p(t)/\mathbb{F}_p(t^p)$ היא נורמלית כי t הוא השורש (היחיד) של x^p-t^p שבמאפיין p שווה ל-$(x-t)^p$. בדוגמה 5.7 ראינו שזו הרחבה לא ספרבילית.

תזכורת 7.11. הרחבת שדות K/F נקראת הרחבת גלואה אם היא נורמלית וספרבילית. זה שקול לכך ש-K הוא שדה פיצול של פולינום ספרבילי מעל F. מה שטוב בהרחבות גלואה זה ש-K/F הרחבת גלואה אם ורק אם

$$|\operatorname{Gal}(K/F)| = [K:F]$$

דוגמה 7.12. נחשב שוב את $\operatorname{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כאשר E הוא שדה הפיצול של הפולינום x^3-2. ראשית נשים לב ששורשי הפולינום הם $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\rho, \sqrt[3]{2}\rho^3$ כאשר ρ שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 3. לכן חבורת גלואה היא תת־חבורה של S_3. בנוסף זאת הרחבת גלואה וקל לחשב כי $[E:\mathbb{Q}]=6$. לכן חבורת גלואה היא מסדר 6 ולכן היא בהכרח S_3.

תרגיל 7.13. יהי $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ פולינום מדרגה p ראשוני עם $p-2$ שורשים ממשיים ו-2 שורשים מרוכבים שאינם ממשיים (שורשים אלה בהכרח צמודים). יהי E שדה הפיצול שלו. הוכיחו כי

$$\operatorname{Gal}(E/F) \cong S_p$$

פתרון. כבר ראינו שחבורת גלואה משוכנת בתוך S_p. בנוסף ברור כי

$$p \mid [E:\mathbb{Q}] = |\operatorname{Gal}(E/\mathbb{Q})|$$

לפי משפט קושי זה אומר שיש בחבורת גלואה איבר σ מסדר p. איבר כזה חייב להיות מחזור באורך p. כמו כן, הצמדה מרוכבת היא איבר בחבורת גלואה. היא מחליפה בין שני השורשים המרוכבים ומקבעת את השאר. לכן השיכון ל-S_p שולח אותה לחילוף. ניתן להניח, אחרי תמורה על האינדקסים, כי החילוף הוא $(1\ 2)$. בחזקה מתאימה של המחזור σ נקבל $\sigma^k(1)=2$. על ידי שינוי שאר האינדקסים אפשר להניח כי המחזור הוא $(1\ 2 \ldots p)$. כלומר חילוף ומחזור באורך p יוצרים את כל S_p ולכן $\operatorname{Gal}(E/F) \cong S_p$.

תרגיל 7.14. יהי $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ פולינום אי פריק ויהי $E/\mathbb{Q}$ שדה הפיצול שלו. הוכיחו שאם $\operatorname{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong Q_8$, אז בהכרח $\deg f(x) \geq 8$.

פתרון. אם $\deg f(x) < 8$, אז $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ משוכנת ב-S_n עבור $n < 8$. בתרגיל בית בתורת החבורות הראנו שאין שיכון כזה של Q_8 בעזרת פעולה של חבורה. נוכיח זאת שוב למקרה הפרטי הנוכחי.

נניח בשלילה כי Q_8 איזומורפית לתת־חבורה של S_7 (זה מכסה גם את המקרים של $S_2, \dots, S_6$). אזי היא פועלת על הקבוצה $X = \{1, \dots, 7\}$. יהי $x \in X$. אז

$$[Q_8 : \mathrm{stab}(x)] = \frac{|Q_8|}{|\mathrm{stab}(x)|} = |\mathrm{orb}(x)| \leq 7$$

ולכן $|\mathrm{stab}(x)| > 1$. נזכר שכל תת־חבורה לא טריוויאלית של Q_8 מכילה את -1 ולכן $-1 \in \mathrm{stab}(x)$ לכל $x \in X$. כלומר -1 פועל בצורה טריוויאלית על X, וזו סתירה כי אין איבר לא טריוויאלי ב-S_7 שפועל טריוויאלית על X. משפט קיילי מספק שיכון של Q_8 ל-S_8.

תרגיל 7.15. נביט בהרחבה $F \subseteq K \subseteq E$ ונניח כי E/F נורמלית. האם K/F נורמלית? האם E/K נורמלית?

פתרון. K/F לא חייבת להיות נורמלית. למשל $F = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ו-E הוא שדה הפיצול של $x^3 - 2$.

אבל E/K כן. אם E הוא שדה הפיצול של $f(x)$ מעל F הוא גם שדה הפיצול של $f(x)$ מעל K.

תרגיל 7.16. מצאו הרחבה $E/\mathbb{Q}$ כך שחבורת גלואה שלה היא $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

פתרון. נבחר $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$. זהו שדה פיצול של $(x^2-2)(x^2-3)(x^2-5)$ ולכן זו הרחבת גלואה. קל לראות שהממד הוא 8 ולכן החבורה בגודל המתאים. בנוסף, כל איבר φ בחבורת גלואה חייב לקיים

$$\varphi(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}, \qquad \varphi(\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}, \qquad \varphi(\sqrt{5}) = \pm\sqrt{5}$$

כלומר כל האיברים מסדר לכל היותר 2. חבורה זו חייבת להיות החבורה המבוקשת.

תרגיל 7.17. שימוש לחבורת גלואה: תהי K/F הרחבת גלואה עם חבורת גלואה G. ויהי $a \in K$. נסמן

$$\mathrm{orb}(a) = \{\varphi(a) \,|\, \varphi \in G\}$$

שהוא המסלול של a תחת הפעולה של חבורת גלואה (הנקודה היא שזו קבוצה ולכן אין חזרות). הוכיחו כי הפולינום המינימלי של a הוא

$$m_a(x) = \prod_{b \in \mathrm{orb}(a)} (x - b)$$

פתרון. מצד אחד $\varphi(a)$ תמיד שורש של הפולינום המינימלי של a ולכן

$$\prod_{b \in \mathrm{orb}(a)} (x - b) \mid m_a$$

כמו כן נזכר כי m_a ספרבילי ולכן אין לו שורשים כפולים. כעת נשאר להוכיח שאין ל-m_a שורשים נוספים. נשים לב ש-K מפצל את m_a ולכן לכל שורש c של m_a יש $\varphi \in G$ כך ש-$\varphi(a) = c$ (טרנזיטיביות על השורשים של פולינום אי פריק וכו'). לכן כל שורש c של m_a שייך ל-$\mathrm{orb}(a)$.

מסקנה 7.18. מתקיים $[F[a] : F] = \deg m_a = |\mathrm{orb}(a)|$.

תרגיל 7.19. נביט על ההרחבה $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$. מצאו את הפולינום המינימלי של $a = \sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$ (לפחות כפירוק לשורשים) ואת $[\mathbb{Q}[a] : \mathbb{Q}]$.

פתרון. נשתמש במשפט הקודם. נזכור שחבורת גלואה של ההרחבה היא $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. נסמן את האיברים שלה $\{\mathrm{id}, \theta, \tau, \theta\tau\}$ כאשר

$$\begin{aligned} \theta(\sqrt{2}) &= -\sqrt{2}, & \theta(\sqrt{3}) &= \sqrt{3} \\ \tau(\sqrt{2}) &= \sqrt{2}, & \tau(\sqrt{3}) &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

נמצא את המסלול של a:

$$\begin{aligned} \mathrm{id}(a) &= \sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6} \\ \theta(a) &= -\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6} \\ \tau(a) &= \sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6} \\ \theta\tau(a) &= -\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

הם כולם שונים כי כזכור $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ הוא בסיס עבור המרחב הוקטורי $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ מעל $\mathbb{Q}$. לכן הפולינום המינימלי הוא $(x-a)(x-\theta(a))(x-\tau(a))(x-\theta\tau(a))$ שמעלתו היא $[\mathbb{Q}[a] : \mathbb{Q}] = 4$.

הערה 7.20. שווה לציין את הנקודה הבאה: נניח נרצה לדעת מהו הפולינום המינימלי של $\sqrt{6}$, ולהשתמש בשיטה לעיל. היינו מגלים ש-$\mathrm{orb}(\sqrt{6}) = \{\pm\sqrt{6}\}$, ולכן הפולינום המינימלי הוא $x^2 - 6$ כפי שאנחנו כבר יודעים.