קורס טופולוגיה, אוניברסיטת בר-אילן, 2022

מרצה: מיכאל מגרל **megereli@math.biu.ac.il** אתר המרצה אתר הקורס wiki סילבוס

# הרצאה 1

מילות מפתח: התכנסות, רציפות, קבוצות פתוחות, טופולוגיה ... Topology =Topos+Logos

Topology $\supset$ {Algebraic Topology, Topological Algebra, Differential Topology, ...}

מרחב מטרי -- אחת מהדרכים לקבלת מרחבים טופולוגיים.

{Metric Spaces} → {Topological Spaces} (לא על, לא חח"ע)

## מרחבים מטריים קישור מומלץ

**הגדרה (Frechet 1906):** **מטריקה** (**או מרחק**) על קבוצה $X \neq \emptyset$ היא פונקציה

$$d : X \times X \to [0,\infty) \quad (x,y) \mapsto d(x,y)$$

אקסיומות:

$m_1$) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

$m_2$) $d(x,y) = d(y,x)$.

$m_3$) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ (אי שוויון המשולש).

(שקול: $d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \cdots + d(x_{n-1},x_n)$) **אינדוקציה !**

אומרים ש - $(X,d)$ **מ"מ** (metric space).

**דוגמאות:**

1) $(\mathbb{R},d)$ שמוגדרת לפי $d(x,y) = |x-y|$

2) $X = \mathbb{R}^n$ $x = (x_1,..,x_n)$ , $y = (y_1,..,y_n)$

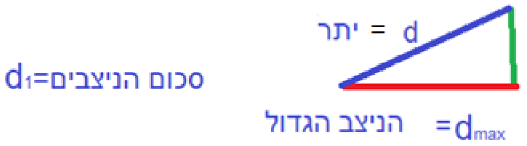
א. מטריקה אוקלידית $(\mathbb{R}^n,d)$ $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$

ב. מטריקת הסכום *Manhattan metric* $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$

ג. מטריקת המקסימום $d_{\max}(x,y) = \max\{|x_i-y_i| : i \in \{1,\cdots,n\}\}$

הערה: $d_{\max} \leq d \leq d_1 \leq n d_{\max}$.

מקרה של $n=2$




<u>**הגדרה:**</u> (**מרחב נורמי**) נניח $E$ מרחב ווקטורי על שדה $\mathbb{R}$.

פונקציה $\|\cdot\|: E \to [0,\infty)$ נקראת **נורמה** אם מתקיים:

$$(n_1 \quad \|\mathrm{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{v} = 0_E$$

$$(n_2 \quad \|c\mathrm{v}\| = |c|\cdot\|\mathrm{v}\| \qquad \text{לכל } c \in \mathbb{R}, v \in E$$

$$(n_3 \quad \|\mathrm{u}+\mathrm{v}\| \le \|\mathrm{u}\| + \|\mathrm{v}\|$$

אז $(E,\|\cdot\|)$ נקרא **מרחב נורמי** [normed space](normed space)

**משפט:** לכל מ"נ $(E,\|\cdot\|)$ הפונקציה $d_{\|\cdot\|}(u,v) := \|u - v\|$ $\quad d_{\|\cdot\|}: \mathrm{E}\times\mathrm{E} \to [0,\infty)$

היא מטריקה (שנקראת מטריקה של הנורמה) **ותמיד מתקיים** $\|\mathrm{v}\| = d_{\|\cdot\|}(0_E,\mathrm{v})$.

**הוכחה:**

$$(m_1 \quad d(x,y) = \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0_E \Leftrightarrow x = y$$

$$(m_2 \quad \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |(-1)|\cdot\|y-x\| = \|y-x\|$$

$$(m_3 \quad \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \le \|x-y\| + \|y-z\|$$

$$\|\mathrm{v}\| = \|-v\| = \|0_E - \mathrm{v}\| = d_{\|\cdot\|}(0_E,\mathrm{v}) \ .$$

**הערה:** "ההתאמה" $(E,\|\cdot\|) \mapsto (\mathrm{E}, d_{\|\cdot\|})$ $\quad \{normed\ spaces\} \to \{metric\ spaces\}$

א. **לא על**

**הסבר:** למשל מרחב מטרי עם 2 נקודות או מרחב מטרי מעגל עם מטריקה אוקלידית "לא מתקבלת "בתמונה" של ההתאמה הנ"ל.

ב. **חד חד ערכית**

**הסבר:** נובע מהשוויון $\|\mathrm{v}\| = d_{\|\cdot\|}(0_E,\mathrm{v})$. מטריקת הנורמה משחזרת את הנורמה.

דוגמאות של מרחב נורמי:

- במרחב ווקטורי $\mathbb{R}^n$ בעל ממד n נגדיר:

א. נורמה אוקלידית $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (משרה מטריקה אוקלידית)

ב. נורמה של הסכום $\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ (משרה מטריקת הסכום)

ג. נורמה של מקסימום $\|x\|_\infty=\|x\|_{\max}=\max\{|x_i| : i\in\{1,\cdots,n\}\}$

(משרה מטריקת מקסימום)

הערה: $\|x\|_{\max}\le\|x\|\le\|x\|_1\le n\|x\|_{\max}$

* בקבוצה $C[a,b]:=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\ \ continuous\ \ functions\}$ נגדיר:

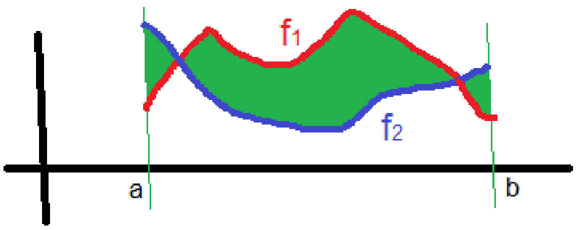
א. $\|f\|_{\max}=\max\{|f(x)| : x\in[a,b]\}$ . מסמנים גם $\|f\|_\infty$.

משרה מטריקת מקסימום $d_{max}(f_1,f_2)=\max_{a\le x\le b}|f_1(x)-f_2(x)|$ (מדוע מתקבל $Max$ ?)

"הסטייה" המקסימלית בין הפונקציות $f_1, f_2$ בקטע נתון.

ב. $\|f\|_1=\int_a^b|f(x)|\,dx$ משרה "מטריקת השטחים" $d_1(f_1,f_2)=\int_a^b|f_1(x)-f_2(x)|\,dx$

"השטח" בין הגרפים של הפונקציות $f_1, f_2$ בקטע $[a,b]$




**הגדרה:** $(X,d)$ נקרא **מרחב פסאודו-מטרי** ($pseudometric$, נקרא $semimetric$ לפעמים) אם:

$(m_1^p$ $x=y \Leftarrow d(x,y)=0$ (החלשה של $m_1$).

$(m_2$ $d(x,y)=d(y,x)$.

$(m_3$ $d(x,y)+d(y,z)\ge d(x,z)$

**הגדרה:** $(X,d)$ נקרא **מרחב אולטרה-מטרי** [ultrametric] אם:

$(m_1$ $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.

$(m_2$ $d(x,y)=d(y,x)$.

$(m_3^u$ $\max\{d(x,y),d(y,z)\}\ge d(x,z)$ (חיזוק של $m_3$).

$\{pseudometric\}\supset\{metric\}\supset\{ultrametric\}$

**הערה:** לכל מטריקה $d$ גם $c \cdot d$ מטריקה $\forall c > 0$ (נכון גם עבור פ"מ, אולטרה-מטריקה)

- לכל קבוצה X נגדיר $\forall x, y \in X : d_0(x,y) = 0$
  *פסאודו מטריקת האפס.*
- ב - $X = \mathbb{R}^2$, נגדיר $\rho_1(x,y) \coloneqq |x_1 - y_1|$

פסאודו-מטריקה (אבל לא מטריקה). למשל $\rho_1((3,5),(3,18)) = 0$ .

ב - $X = \mathbb{R}^n$, נגדיר $\rho_k(x,y) \coloneqq |x_k - y_k|$ (הרכיב ה k )

- ב $X = C[0,5]$ $\|f\|_{1 \le x \le 2} = \max\{|f(x)| : x \in [1,2]\}$ semi-norm (מדוע לא נורמה ?)
- נגדיר על קבוצה X " אולטרה-מטריקת 0-1":

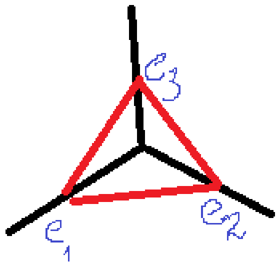
$$d_\Delta(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

**טענה**: על כל קבוצה $X$ עם $|X| \ge 2$ יש (לפחות) $\aleph = 2^{\aleph_0}$ מטריקות שונות.

**הסבר:** העוצמה $card\{rd_\Delta : r > 0\} = card(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$

**תרגיל:** $X = \left\{\frac{e_1}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{e_n}{\sqrt{2}}\right\} \subset \mathbb{R}^n$

עם מטריקה שמושרית מ $d$ נותן דוגמה ספציפית של $d_\Delta$.




**הסבר:** $d\left(\frac{e_i}{\sqrt{2}}, \frac{e_j}{\sqrt{2}}\right) = \left\|\frac{e_i}{\sqrt{2}} - \frac{e_j}{\sqrt{2}}\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\|e_i - e_j\|}_{\sqrt{2}} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$

נשים לב: כאשר $i \neq j$ $\|e_i - e_j\| = \sqrt{\dots + 1^2 + \cdots + 1^2 + \cdots} = \sqrt{2}$

- **דוגמה חשובה:** על שלמים $\mathbb{Z}$ נגדיר **מטריקה p-אדית** לכל מספר ראשוני $p \in \mathbb{P}$ נתון.

$$d_p(x,y) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{p^{k(x,y)}}, k(x,y) \coloneqq \max\{i : p^i | (x-y)\}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$ אולטרה-מטריקה

**למשל:** $x = 24,\ y = 6,\ p = 3$. $d_3(24,6) = ?$

$d_3(24,6) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

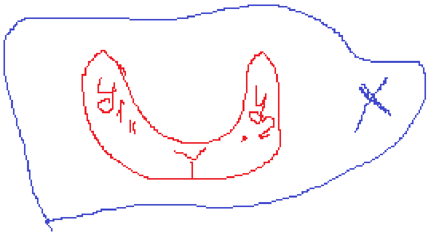
$24 - 6 = 18 = 3^2 \cdot 2$

$d_3(0,5) = d_3(0,1) = 1$

**דוגמה חשובה:** (קובית קנטור) ב $X=\{0,1\}^{\mathbb{N}}=\{(a_1,a_2,\cdots):\quad a_k\in\{0,1\}\}$

$d(x,y):=\begin{cases}\frac{1}{2^{k(x,y)}}, k(x,y):=\min\{i:\ x_i\neq y_i\},\ x\neq y\\ 0,\ x=y\end{cases}$ אולטרה-מטריקה

**הגדרה (תת מרחב מטרי):** יהי $(X,d)$ מ"מ, $\emptyset\neq Y\subseteq X$.




**מטריקת הצמצום של $Y$** מוגדרת:

$$d_Y(y_1,y_2)=d(y_1,y_2)$$

$$\forall y_1,y_2\in Y$$

מתקבל מ"מ $(Y,d_Y)$ שנקרא **תת מרחב מטרי** של $(X,d)$.

**למשל:** $\underbrace{Y=\left\{\frac{e_i}{\sqrt{2}},1\leq i\leq n\right\}}_{\text{ת"מ מטרי}}\subset\underbrace{(\mathbb{R}^n,d)}_{=X}$

מטריקת הצמצום על $Y$ כאן שווה ל - $d_\Delta$.

**הערה**: כל מ"מ הוא תת מרחב מטרי (עד כדי איזומטריה) של מרחב נורמי (נוכיח בהמשך).

**הגדרה:** נתון מ"מ $(X,d)$, $\emptyset\neq A,B\subseteq X$.

$$\boldsymbol{d(A,B)}=\inf\{d(a,b)|a\in A,b\in B\}$$

$$0\leq d(A,B)<\infty$$

**אזהרה:** זאת לא מטריקה וגם לא פסאודו-מטריקה בקבוצה $P(X)$ של תת קבוצות.

**הערה:** לא תמיד $inf$ ניתן להחליף ב - $min$.

$$A=\{x\in\mathbb{R}|x<0\},B=\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$$

$$min\neq inf=d(A,B)=0$$

**אישוויון חשוב:** תמיד מתקיים $|d(x,A)-d(y,A)|\leq d(x,y)$ (ראו בתירגול)

**הגדרה (הקוטר):** $\boldsymbol{diam(A)}:=\sup\{d(x,y)|x,y\in A\}$

$$0\leq diam(A)\leq\infty$$

$A$ נקראת **חסומה** אם $diam(A)<\infty$.

**הערה:** לא תמיד $sup=max$ $\quad A=(0,1)\quad max\ldots\neq sup\ldots=diam=1$

דוגמה: $diam(\mathbb{Z},d_p)=1$.

$$d_p(0,1)=1 \quad \forall k\in\{0,1,\cdots\} \quad \tfrac{1}{p^k}\le 1$$

**הגדרות:** יהי $(X,d)$ , $a\in X$ , $r>0$.

1) **כדור פתוח** עם מרכז ב – $a$ ורדיוס = $r$ $\quad a\in B(a,r)=B_r(a)\coloneqq\{x\in X|d(a,x)<r\}$

2) **כדור סגור** $\quad a\in B[a,r]=B_r[a]\coloneqq\{x\in X|d(a,x)\le r\}$

3) **ספרה** *sphere* $\quad a\notin S(a,r)=S_r(a)\coloneqq\{x\in X|d(a,x)=r\}$

**הערה:** $a\in B(a,r)\subseteq B[a,r] \qquad \underbrace{S(a,r)}_{a\notin}\subsetneq\underbrace{B[a,r]}_{a\in}$

**דוגמה:** לתאר $B(a,r),B[a,r],S[a,r]$ במרחב $(X,d_\triangle)$.

למשל: $S[a,r]=\begin{cases}\varnothing & 0<r\ne 1\\ X\setminus\{a\} & r=1\end{cases}$ ....... (המשיכו !)

**דוגמה:** ב $(\mathbb{Z},d_3)$ $\qquad B[0,\tfrac{1}{3}]=3\mathbb{Z}$

הסבר: $B[0,\tfrac{1}{3}]=\{x\in\mathbb{Z}:\ d_3(x,0)\le\tfrac{1}{3}\}=\{x\in\mathbb{Z}:\ 3|x\}=3\mathbb{Z}$

**תכונות:** (לבדוק !)

א) $0<r_1\le r_2\Rightarrow B_{r_1}(a)\subseteq B_{r_2}(a)$.

ב) $diam\big(B_r(a)\big)\le 2r$ (לא תמיד שווה. דוגמה ?).

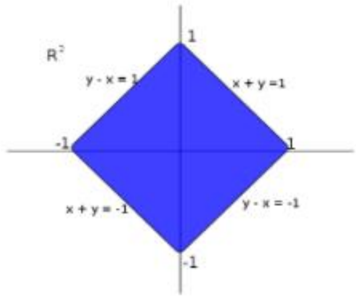
ג) $A\subseteq X$ חסומה $\Leftrightarrow \exists z\in X,\exists r>0: A\subseteq B_r(z)$.

ד) (**כדור בתת מרחב**) $B_{d_Y}(y,\epsilon)=B(y,\epsilon)\cap Y$

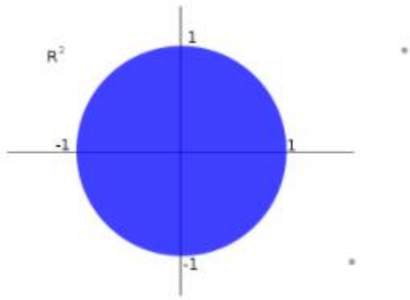
ה) $d\le\rho\Rightarrow B_\rho(a,r)\subseteq B_d(a,r)$

**דוגמה:** לתאר $B(a,r)$ במרחבים $(\mathbb{R}^2,d_{max}),(\mathbb{R}^2,d_1),(\mathbb{R}^2,d)$

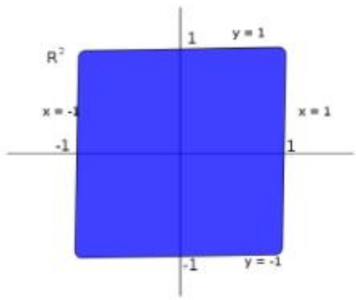
- The metric induced by $\|\cdot\|_1$ in that case, the unit ball is: $|x|+|y|<1$




- The metric induced by $\|\cdot\|_2$ in that case, the unit ball is: $\sqrt{x^2+y^2}<1$




- The metric induced by $\|\cdot\|_\infty$ in that case, the unit ball is: $\max\{|x|,|y|\}<1$




**הגדרה:** $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ (בין מרחבים – מטריים). אומרים ש – $f$

**שיכון איזומטרי** אם **שומרת מרחקים**, כלומר $\forall x_1,x_2\in X: \rho\big(f(x_1),f(x_2)\big) = d(x_1,x_2)$

**איזומטריה** אם $\begin{cases} f(X)=Y \\ f \text{ שומרת מרחקים} \end{cases}$

**טענה:** כל שיכון איזומטרי תמיד חח"ע.

**הוכחה:** אם $x_1\neq x_2$ נניח ש $f(x_1)=f(x_2)$

אז לכן $0=\rho\big(f(x_1),f(x_2)\big) = d(x_1,x_2) \underbrace{>}_{m_1} 0$

בסתירה!

■

שימו לב: אם $f:X\to Y$ שיכון איזומטרי אם ורק אם $f:X\to f(X)$ איזומטריה.

**הערה:** איזומטריה ב $Metr$ בתפקיד של איזומורפיזמים. ז"א יש אותן תכונות מטריות.

- $[5,6] \simeq [1,2] \not\simeq [8,10]$

  **הסבר:** הזזה ל 4 יחידות בממשיים היא איזומטריה

  $T_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 4 + x$

  משרה איזומטריה $[1,2] \to [5,6]$

  ב $[8,10]$ קיימות נקודות $x, y$ כך ש $d(x,y) = 2$ אבל לא ב $[1,2]$.

  (הסבר אחר: המרחבים עם קוטר שונה. אבל **קוטר נשמר ע"י איזומטריה**)

- שיכון איזומטרי לינאר $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ לכל $m \le n$ (**להשלים**)
- כל הזזה $T_a(v) = a + v$ $T_a : E \to E$ במרחב נורמי $a \in E$ היא איזומטריה.

  **הסבר:** $\|(a+v_1) - (a+v_2)\| = \|v_1 - v_2\|$

- כל הזזה $T_a(x) = a + x$ $T_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ במרחב $(\mathbb{Z}, d_p)$ היא איזומטריה.

  (**להשלים**)

- $(\mathbb{Z}, d_5)$ לא איזומטרי עם $(\mathbb{Z}, d_3)$.

  **הסבר:** ב $(\mathbb{Z}, d_5)$ קיימות נקודות $x, y$ כך ש $d_5(x,y) = \frac{1}{5}$ אבל לא ב $(\mathbb{Z}, d_3)$.

- קיים שיכון איזומטרי $\mathbb{R}^n \to l_2$.

  (**להשלים**) דומה למקרה של $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ לכל $m \le n$.

- קיים שיכון איזומטרי $(\mathbb{N}, d_\Delta) \to l_2$.

  **הסבר מהיר:** $n \mapsto \frac{e_n}{\sqrt{2}}$, $(\mathbb{N}, d_\Delta) \to \{\frac{e_n}{\sqrt{2}} : n \in \mathbb{N}\}$ איזומטריה.

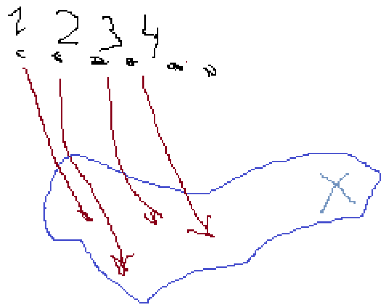
הערה: *מרחב הילברט סדרתי* $l_2 = \{x = (x_1, x_2, \cdots) : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} \qquad < x, y > := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$ מכפלה סקלרית (פנימית)

## התכנסות סדרות

**הגדרה (תזכורת):** **סדרה** $x_n$ בקבוצה $X$ היא פונקציה $f : \{1,2,\cdots\} = \mathbb{N} \to X, n \mapsto f(n) = x_n$.

***תת סדרה*** $x_{n_k}$ היא צמצום הפונקציה על תת קבוצה אינסופית $n_1 < n_2 < n_3 \cdots$




**<u>הגדרה:</u>** אומרים שסדרה $x_n$ **מתכנסת** ל $a \in X$ במרחב $(X,d)$

ונסמן $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ (או $x_n \xrightarrow{d} a$) אם מתקיים:

הגדרה 1: $\lim_{n\to\infty} d(a,x_n) = 0$

הגדרה 2: כל $\varepsilon$-סביבה $B(a,\varepsilon)$ של $a$ מכילה כמעט כל האיברים של הסדרה $x_n$

הגדרה 3: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(a,x_n) < \varepsilon$

דוגמה: ב $(\mathbb{Z}, d_3)$ $\lim_{n\to\infty} 3^n = 0$

**הסבר:** $d_3(3^n,0) = \frac{1}{3^n} \to 0$ .

**<u>הערה:</u>**

- סדרה קבועה לבסוף תמיד מתכנסת (ברור מה הגבול !) בכל מרחב $(X,d)$.
- תת סדרה של סדרה מתכנסת גם מתכנסת (ברור מה הגבול !)
- נניח $\rho \leq d$ . אז $x_n \xrightarrow{d} a \quad \Leftarrow \quad x_n \xrightarrow{\rho} a$.

**הסבר:** $0 \leq \rho(a,x_n) \leq d(a,x_n) \to 0$ בעזרת *תכונת סנדוויץ'* $\rho(a,x_n) \to 0$ .

- התכנסות ב $\mathbb{R}^n$ היא התכנסות רכיב-רכיב.

**הסבר:** התכנסות גוררת "התכנסות רכיב-רכיב" כי $0 \leq \| v^{(m)} - u \|_k \leq \| v^{(m)} - u \| \xrightarrow{m\to\infty} 0$

($\| x \|_k$ "סמי-נורמה לפי קואורדינטה ה $k$ " שהגדרנו)

גם ההפך נכון. תשתמשו בזה ש $\sum_{k=1}^{n} \| v \|_k =$ "נורמה של הסכום".

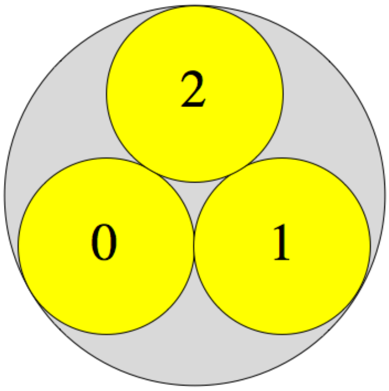
**תרגיל**: תנו דוגמה של סדרה לא מתכנסת ב $l_2$ שמתכנסת רכיב-רכיב.

**הסבר:** הסדרה הבאה מתכנסת רכיב רכיב לווקטור האפס

$$e_1=(1,0,0,0\cdots)$$
$$e_2=(0,1,0,0\cdots)$$
$$e_3=(0,0,1,0\cdots)$$
$$\dots$$

$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ לא מתכנסת כי $\forall i\neq j \quad d(e_i,e_j)=\sqrt{2}$

***תרגיל:*** לפי האיור הבא תרכיבו ניסוח לתרגיל אפשרי לגבי מ"מ $(\mathbb{Z},d_3)$




**ניסוח אפשרי:** המרחב אפשר להציג כאיחוד של שלושה כדורים סגורים עם רדיוס $\frac{1}{3}$.

הסבר: $B_{\frac{1}{3}}[0]\cup B_{\frac{1}{3}}[1]\cup B_{\frac{1}{3}}[2]=3\mathbb{Z}\cup(3\mathbb{Z}+1)\cup(3\mathbb{Z}+2)=\mathbb{Z}$

***הגדרה:*** נק' $a\in X$ נקראת **מבודדת** (isolated) אם $\exists\epsilon>0:\ \ B(a,\epsilon)=\{a\}$

דוגמאות: א. אין נקודה מבודדת ב $\mathbb{R}$ או ב $\mathbb{Q}$ ...

ב. נקודה 3 מבודדת בתת מרחב $X=[0,1]\cup\{3\}$ של $\mathbb{R}$.

***הגדרה:*** מ"מ $(X,d)$ נקרא ***דיסקרטי*** אם כל נקודה ב X מבודדת.

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, כל מרחב $X$ עם מטריקת 0-1 הם דיסקרטיים.
- (Hamming distance)

בקבוצה $F(\mathbb{N})=\{(x_1,x_2,\cdots):\quad x_i\in\{0,1\}\ \ \exists\, k\in\mathbb{N}\ x_i=0\ \ \forall\, i>k\}$

$$d_H(x,y)=\sum_i|x_i-y_i|$$

$(F(\mathbb{N}),d_H)$ מרחב מטרי כך שהטופולוגיה שלו היא דיסקרטית.

המשמעות של $d_H(x,y)$ היא מספר ההבדלים בין המילים $x,y$.

מ"מ $(F(\mathbb{N}),d_H)$ משוכן לתוך מרחב נורמי $l_1=\{x=(x_1,x_2,\cdots):\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|<\infty\}$.

# הרצאה 2

**משפט:** $a$ נקודה מבודדת במרחב **מטרי** $(X,d)$ אם ורק אם

$\lim x_n = a$ גורר שהסדרה $x_n$ היא בהכרח קבועה לבסוף $x_1,\cdots,x_m,a,a,\cdots$.

בכיוון שני נוכיח יותר: **אם a לא מבודדת אז שקיימת סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל $a$.**

הוכחה: אם $a$ מבודדת אז קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $B(\mathrm{a},\varepsilon)=\{\mathrm{a}\}$.

**(כיוון ראשון)** נניח ש $\lim x_n = a$.

עבור $\varepsilon$ הנ"ל קיים $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ כך ש $x_n \in B(\mathrm{a},\varepsilon)=\{\mathrm{a}\}$. אז הסדרה היא לבסוף $a$.

**(כיוון שני)** נניח כעת שנקודה $a$ לא מבודדת.

נוכיח: **שקיימת סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל $a$.**

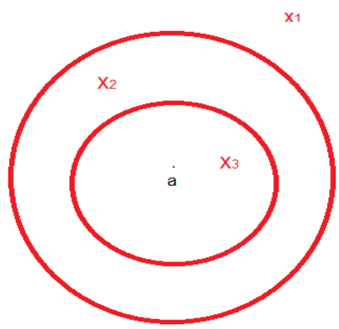
נבחר $x_1 \neq a$ (אם לא קיים אז המרחב הוא נקודון $\{a\}=X$ והנקודה מבודדת).

נעיר ש $0<d(a,x_1)$ כי $(X,d)$ מרחב מטרי ומתקיימת $m_1$.

נבחר $0<\varepsilon_1<\min\{d(a,x_1),1\}$

בגלל ש $a$ לא מבודדת קיים $x_2 \in B(a,\varepsilon_1), x_2 \neq a$.

נעיר ש $x_2 \neq x_1$ כי $d(a,x_2)<d(a,x_1)$. וגם $d(a,x_2)<1$.




נמשיך בצורה רקורסיבית את הבנייה.

אם כבר הגדרנו $x_1,\cdots,x_n$ (שונים) $d(a,x_n)<d(a,x_{n-1})<\cdots<d(a,x_1)$

ולא שווים ל $a$ עם התנאי $\forall 1<k\le n \;\; d(a,x_k)<\frac{1}{k-1}$

אז נבחר $\varepsilon_n$ שמקיים $0<\varepsilon_n<\min\{d(a,x_n),\frac{1}{n}\}$

ונבחר $x_{n+1}$ כך ש $d(a,x_{n+1})<\varepsilon_n,\; x_{n+1}\ne a$ (שוב, שימו לב ש $a$ לא מבודדת)

אז $d(a,x_{n+1})<d(a,x_n)<d(a,x_{n-1})<\cdots<d(a,x_1)$.

כך נקבל סדרה עם איברים שונים ו $\lim x_n=a$ כי לכל $n>1$ $\;0\leftarrow d(a,x_n)<\frac{1}{n-1}$.

☺

**<u>תרגיל:</u>** הוכיחו שלא קיימת נקודה מבודדת ב $(\mathbb{Z},d_p)$.

**הסבר:** $\forall a\in\mathbb{Z} \quad a+p^n\xrightarrow{d_p}a$ סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל $a$.

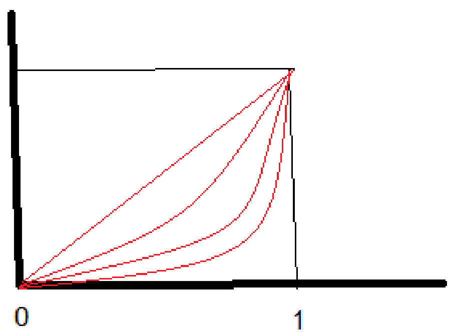
**<u>דוגמה:</u>** ב - $C[0,1]$ קיימת סדרה $f_n$ כך ש

$$\begin{cases} f_n \overset{d_1}{\to} \theta \\ f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow} \theta \end{cases}$$

$d_1(f_1,f_2)\coloneqq\int_0^1|f_1(x)-f_2(x)|dx \qquad d_{max}(f_1,f_2)\coloneqq\max\limits_{0\le x\le 1}|f_1(x)-f_2(x)|$.

**הסבר:**

נגדיר סדרה של פונקציות (סדרה ב - $C[0,1]$) $\quad f_n(x)=x^n\,,x\in[0,1] \quad \theta(x)=0$




$$d_1(f_n,\theta)=\int_0^1|f_n(x)-0|dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$\lim_{n\to\infty}d_1(f_n,\theta)=0 \qquad f_n\overset{d_1}{\to}\theta$$

מצד שני

$$d_{max}(f_n,\theta)=\max_{0\le x\le 1}|f_n(x)-0(x)|=\max_{0\le x\le 1}x^n=1\nrightarrow 0$$

$$\Rightarrow d_{max}(f_n,\theta)\nrightarrow 0$$

$$\Rightarrow f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow} \theta$$

**תרגיל:** באופן דומה לכל $[a,b]$ , $a<b$.

**<u>הגדרות:</u>**

א) נניח $d,\rho$ מטריקות על <u>אותה קבוצה</u> $X$. אומרים ש – $d$ **דומיננטי ביחס ל –** $\rho$ אם:

$$\boxed{x_n \overset{d}{\to} a \Rightarrow x_n \overset{\rho}{\to} a}$$

לכל סדרה $x_n\in X$.

ב) אומרים ש - $d\sim\rho$ **("שקולות")** אם יש אותה התכנסות. ז"א

$$\boxed{x_n \overset{d}{\to} a \Leftrightarrow x_n \overset{\rho}{\to} a}$$

**<u>תכונות פשוטות:</u>**

1) $d\sim c\cdot d$, $c>0$ קבוע.

2) $\rho\le cd \Leftarrow d$ דומיננטי ביחס ל $\rho$ – (הסבר: דרך תכונת הסנדוויץ').

3) מטריקת 0-1 (או כל מטריקה עם טופולוגיה דיסקרטית) דומיננטית ביחס לכל מטריקה.

הסבר: כי לגבי מטריקת 0-1 נקבל מרחב דיסקרטי. כל נקודה מבודדת. במרחב כזה יש רק התכנסות קבועה לבסוף. מצד שני כל סדרה שהיא קבועה לבסוף מתכנסת לגבי כל מטריקה על אותה קבוצה.

**דוגמה:** $d_{max}$ דומיננטי ביחס ל - $d_1$ בקבוצה $C[a,b]$.

**<u>הסבר:</u>** מ"ל – $d_1\le c\cdot d_{max}$.

ש"ל – $\|\cdot\|_1\le c\cdot\|\cdot\|_{max}$.

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(x)|dx\le\int_a^b max|f(x)|dx\le\underbrace{(b-a)}_{c>0\text{ קבוע}}\cdot\underbrace{\max_{a\le x\le b}|f(x)|}_{=\|f\|_{max}}$$

הוכחנו $\|\cdot\|_1\le(b-a)\cdot\|\cdot\|_{max}$.

**<u>דוגמה:</u>** $X:=\mathbb{R}^n$. $\boxed{d_{max}\sim d\sim d_1}$

**<u>הסבר:</u>** $\boxed{d_{max}\le d\le d_1\le n\cdot d_{max}}$

**<u>מסקנה:</u>** שלושת המטריקות הנ"ל שונות אבל יש אותה התכנסות.

<u>בהמשך נוכיח</u> – הטופולוגיות שוות!

## הגדרה חשובה: (טופולוגיה של $(X,d)$)

נגדיר טופולוגיה של מ"פ $(X,d)$ כאוסף של כל תת-קבוצות **פתוחות** ב $X$ . נסמן:

$$\boldsymbol{top(d)} = top(X,d) \coloneqq \{(X,d) \text{ קבוצות פתוחות ב}\}$$

כאשר **"קבוצה פתוחה"** מוגדרת כך:

אומרים ש - $O \subseteq X$ היא פתוחה אם (כל נקודה שלה **פנימית**) מתקיים:

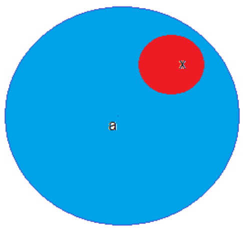
$$\boxed{x \in O \Rightarrow \exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq O}$$

<u>שימו לב:</u> תת קבוצה $A \subseteq X$ **לא פתוחה** ב $(X,d)$ אם"ם <u>קיימת</u> נקודה $a \in A$ כך ש $B(a,\varepsilon)$ לא מוכל ב $A$ לכל $\varepsilon > 0$.

הערה: מכאן ברור למשל $\emptyset \in top(d)$.

**<u>משפט:</u>** $B_r(a) \in top(d)$ : $\forall r > 0, \forall a \in X, \forall (X,d)$ .

(ז"א "כדור פתוח" קבוצה פתוחה).




**<u>הוכחה:</u>** <u>הרעיון:</u> $d(a,x) + r_x < r$.

מכאן ניקח כל מס' $r_x$ כך: $$0 < r_x < \underbrace{r - d(a,x)}_{\substack{\text{חיובי} \\ x \in B_r(a) \text{ כי}}}$$

נוכיח $B_{r_x}(x) \subseteq B_r(a)$.

נניח $y \in B_{r_x}(x)$ , צ"ל - $y \in B_r(a)$.

$$d(a,y) \underbrace{\leq}_{m_3} d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + r_x < r$$

$$\Rightarrow d(a,y) < r$$

ז"א $y \in B_r(a)$.

זה קורה עבור כל $x \in B_r(a)$ (ועבור $r_x$ מתאים) ולכן $B_r(a)$ קבוצה פתוחה.

☺

**<u>תוצאה:</u> {כדורים פתוחים} בסיס לטופולוגיה $top(d)$**

$$top(d) \ni O = \cup_{x\in O} B_{\epsilon_x}(x)$$

התנאים הבאים שקולים:

1) $\emptyset \neq O \in top(d)$.

2) $O =$ איחוד של "כדורים פתוחים".

**<u>תרגיל:</u>** הוכיחו שלכל $(X, top(d))$ מתקיים:

$t_1$) $\emptyset, X \in top(d)$

$t_2$) $O_1, O_2 \in top(d) \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in top(d)$ (חיתוך סופי של קבוצות פתוחות גם פתוח)

$t_3$) $\forall i \in I \quad O_i \in top(d) \Rightarrow \bigcup_{i\in I} O_i \in top(d)$ (איחוד של קבוצות פתוחות גם פתוח)

**<u>הערה:</u>** $\{t_1, t_2, t_3\}$ "אקסיומות של טופולוגיה" על קבוצה $X$ בצורה אבסטרקטית.

**הערה:** אחד מהמתמטיקאים שהשפיעו על טופולוגיה בצורה מאוד חזקה היה *Felix Hausdorff*. על החיים ומותו הטרגי בתקופת הנאצים בגרמניה ממליץ לקרוא

https://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Hausdorff

**<u>משפט (תכונת Hausdorff):</u>**

נניח $(X, d)$ **מרחב מטרי**. אז לכל 2 נקודות <u>שונות</u> יש סביבות זרות.

**הוכחה:** $a \neq b \overset{m_1}{\Rightarrow} d(a,b) > 0$

ניקח $0 < \epsilon \leq \frac{d(a,b)}{2}$.

אז $B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$. נבדוק !

אם נניח <u>שלא</u>: $\exists\, x \in B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b)$

$$\begin{cases} d(a,x) < \epsilon \\ d(b,x) \overset{m_2}{=} d(x,b) < \epsilon \end{cases}$$

נחבר: $d(a,b) \underbrace{\leq}_{m_3} d(a,x) + d(x,b) < 2\epsilon$

$\Rightarrow d(a,b) < 2\epsilon$

סתירה לבחירה ☺

**<u>משפט (יחידות הגבול):</u>** במרחב **מטרי** גבול סדרה הוא יחיד (אם קיים).

**<u>הוכחה:</u>** אם נניח בשלילה $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ $a \neq b$

לפי משפט (תכונת Hausdorff) יש סביבות זרות

$B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$

מצד שני, כמעט כל האיברים $x_n$ נמצאים ב - $B_\epsilon(a)$ וגם ב - $B_\epsilon(b)$.

מכאן סתירה ⇐ מש"ל. ☺

**דוגמה נגדית** (במרחב פסאודו-מטרי אין יחידות הגבול)

במרחב פסאודו-מטרי $X = (\mathbb{R}^2, \rho_1)$ עם $\rho_1(x,y) := |x_1 - y_1|$

ניקח את הסדרה $\forall y \in \mathbb{R}$ $x_n = \left(1 + \frac{2}{n}, 7\right) \to (1,y)$

אין יחידות של הגבול! (צריך לשים לב שזאת לא מטריקה).

**תרגיל:** הוכיחו שמרחב פסאו-דומטרי עם יחידות הגבול הוא תמיד מרחב מטרי.

**<u>הערה:</u>**

ב $(X,d)$ מ"פ, $a \in X$, $x_n$ סדרה. התנאים הבאים שקולים:

1) $\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$ $(d(x_n,a) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0)$.

2) $\forall\epsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\,, n > N: d(x_n,a) < \epsilon$.

3) בכל $\epsilon$-סביבה של $a$ (ז"א בכל $\mathrm{B}(\mathrm{a},\varepsilon)$ ) נמצאים כמעט כל האיברים של הסדרה.

**4) בכל קבוצה פתוחה $O$ שמכילה את $a$, כמעט כל האיברים נמצאים ב $O$.**

**<u>הגדרה:</u>** ת"ק $A$ במרחב $(X,d)$ נקראת **סגורה** אם המשלים קבוצה פתוחה.

ז"א אם $A^c := X \setminus C \in top(d)$

**<u>למשל:</u>** $B_r[a]$ ("כדור סגור") הוא סגור.

לבדוק ! (יש הוכחה פשוטה גם דרך רציפות פונקציות !)

**טענה:** איחוד **סופי** של קבוצות סגורות סגור. חיתוך של קבוצות סגורות סגור.

רמז: ניתן להוכיח את זה ע"י התכונות של קבוצות פתוחות וחוקי דה-מורגן.

**תרגיל:** הוכיחו שכל נקודון סגור במרחב מטרי (ושזה לא נכון במרחב פסאודו-מטרי).

הסיקו: כל תת קבוצה סופית במרחב מטרי היא סגורה.

**תרגיל:** הוכיחו שכל קבוצה סגורה במרחב מטרי = חיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

## סדרות קושי ומרחב מטרי שלם

**הגדרה:** $(X,d)$ מ"מ. סדרה $x_n \in X, n \in \mathbb{N}$ נקראת **סדרת קושי** $(Cauchy)$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$d(x_i, x_j) < \epsilon$$

$$i, j \geq n_\epsilon$$

**הערה:** אם $x_n$ מתכנסת ב $X$ אז $x_n$ סדרת קושי (לבדוק!).

לכן אם סדרה לא ס"ק אז גם לא מתכנסת.

למשל:

$$e_1 = (1,0,0,0\cdots)$$
$$e_2 = (0,1,0,0\cdots)$$
$$e_3 = (0,0,1,0\cdots)$$
$$\cdots$$

$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ לא מתכנסת כי $\forall i \neq j \quad d(e_i, e_j) = \sqrt{2}$

**הגדרה:** מ"מ $(X,d)$ נקרא **שלם** $(Complete)$ אם לכל סדרת קושי $x_n$ ב $X$ יש גבול ב-$X$.

**הגדרה:** מ"נ $(E, \|\cdot\|)$ נקרא **מרחב בנך** $(Banach\ space)$ אם $(E, d_{\|\cdot\|})$ שלם.

**דוגמאות:**

- $(C[a,b], \|\cdot\|_{\max}), (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\max}), (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|), (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ מרחבי Banach
- $(C[a,b], \|\cdot\|_1), (C[a,b], \|\cdot\|_2)$ **לא** מרחבי Banach

הערה: $\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$

מכפלה פנימית ב - $C[a,b]$ שממנה מקבלים נורמה: $\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$

הנורמה מגדירה מטריקה $d_2$ על מרחב הפונקציות $C([a,b])$.

- נגדיר $l_\infty := \left\{x = (x_1, x_2, \dots) \middle| \|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty\right\}$ מרחב Banach

מרחבה Banach של <u>סדרות **חסומות**</u>.

<u>**הכללה:**</u> מרחב <u>פונקציות חסומות</u> על קבוצה S

$$l_\infty(S) := \{f: S \to \mathbb{R} \,|\, f(S) \text{ חסום ב } \mathbb{R}\}$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in S} |f(x)|$$

<u>2 מקרים פרטיים:</u>

1) $S = \mathbb{N}$, אז נקבל את $l_\infty(\mathbb{N}) = l_\infty$.

2) $S = \{1,2,\dots,n\}$, אז נקבל את $(\mathbb{R}^n, d_{max})$.

<u>**דוגמה:**</u> $X = (\mathbb{Z}, d_p)$ מ"מ לא שלם !

נניח עבור $p = 3$: $x_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}$

סדרת קושי שלא מתכנסת ב $X$ **(פרטים בתרגול).**

<u>**הערה:**</u>

שתי תכונות מאוד חשובות של שלמות:

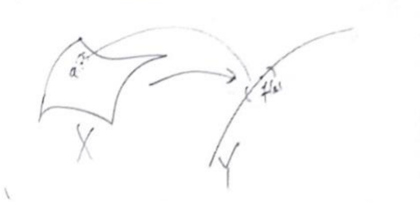
1) שלמות נשמרת בקבוצות סגורות (אם מרחב הוא שלם, אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלמה לגבי מטריקת הצמצום).

2) נניח $(Y, d_Y)$ תת מרחב מטרי של $(X, d)$. אז אם $(Y, d_Y)$ שלם אז $Y$ <u>סגור</u> ב – $X$.

<u>רמז:</u> <u>תת קבוצה</u> היא סגורה $\Leftrightarrow$ היא "סגורה בנוגע להתכנסות".

## <u>**פונקציות רציפות**</u>

<u>**הגדרה (רציפות):**</u> נניח $(X,d)$, $(Y,\rho)$ מרחבים. פונקציה $f: X \to Y$ נקראת **רציפה בנקודה** $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}$ אם:



$$\boxed{\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: d(a,x)<\delta \Rightarrow \rho\big(f(a),f(x)\big)<\epsilon}$$

$f$ נקראת **רציפה**, כאשר $f$ רציפה בכל נקודה $a\in X$.

נסמן: $f\in C(X,Y)$ . אם $Y=\mathbb{R}$ אז נסמן: $f\in C(X)$.

**הגדרה:** אומרים ש – $f$ **רציפה במידה שווה (במ"ש)** *uniformly continuous*

אם בבחירה של $\delta$ אין תלות ב $a$. ז"א

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta: d(x_1,x_2)<\delta \Rightarrow \rho\big(f(x_1),f(x_2)\big)<\epsilon$$

$$\boxed{f\in UC(X,Y)}$$

**הגדרה:** אומרים ש $f$ מקיימת **תנאי ליפשיץ** $(Lipschitz)$ לגבי המקדם $0<c$ אם:

$$\boxed{\forall x_1,x_2\in X: \rho\big(f(x_1),f(x_2)\big)\le c\cdot d(x_1,x_2)}$$

נסמן $\boxed{f\in Lip_c(X,Y)}$ $\boxed{Lip(X,Y)=\bigcup_{c>0} Lip_c(X,Y)}$

תמיד: $\boxed{Lip(X,Y)\subset UC(X,Y)\subset C(X,Y)}$

**דוגמאות מאנליזה:**

רציפה אבל לא במ"ש $f(x)=x^2\,, f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

רציפה במ"ש אבל לא ליפשיץ $f(x)=\sqrt{x}\,, f:[0,1]\to\mathbb{R}$

**הערה:** כל שיכון איזומטרי פונקצית ליפשיץ עם מקדם 1 (**אבל לא ההפך ! תנו דוגמה**).

**סימון:** אם קיימת איזומטריה, נסמנה $(X,d)\simeq(Y,\rho)$

זהו "יחס שקילות" **באוסף** Metr (מרחבים מטריים).

1) $(X,d)\simeq(X,d)$ (פ' הזהות).

2) $(X,d)\simeq(Y,\rho) \Leftarrow (Y,\rho)\simeq(X,d)$ (פ' הופכית).

3) $\begin{cases}(X_1,d_1)\simeq(X_2,d_2)\\(X_2,d_2)\simeq(X_3,d_3)\end{cases} \Rightarrow (X_1,d_1)\simeq(X_3,d_3)$ (ההרכבה)

**דוגמאות:**

1) **הזזה** במרחב נורמי $T_v(x) = v + x$ $T_v: E \to E$ תמיד איזומטריה (הוכחנו).

תבדקו ש $T_v(B(0_E, r)) = B(v, r)$. לכן $B(v,r) \simeq B(u,r)$ $\forall u,v \in E$.

2) ) $f: E \xrightarrow{\|\cdot\|} [0,\infty) \in Lip_1(E,\mathbb{R})$, כאשר $E$ מרחב נורמי.

הסבר: $\big|\|u\| - \|v\|\big| \underbrace{\leq}_{c=1} \|u - v\|$

3) $f_A: X \to \mathbb{R} \in Lip_1(X,\mathbb{R})$ המוגדרת ע"י: $f_A(x) = d(x,A)$

הסבר: שימוש באי שוויון חשוב $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$

**משפט (עיקרון *Heine*):** נניח $(X,d), (Y,\rho)$ מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f: X \to Y$ התנאים הבאים שקולים:

1) $f$ רציפה.

2) $f$ שומרת על התכנסות (כלומר, $x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$).

3) המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (ז"א $\forall O \in top(\rho): f^{-1}(O) \in top(d)$)

לפני ההוכחה קודם נדון כמה תוצאות.

**משפט (השוואת טופולוגיות):** נניח ש - $d, \rho$ מטריקות על אותה קבוצה $X$. אז התנאים הבאים שקולים:

1) $top(\rho) \subseteq top(d)$.

2) $d$ דומיננטי ביחס ל $\rho$. ז"א $x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow x_n \xrightarrow{\rho} a$

**הוכחה:** נגדיר את "פונקציית הזהות" $x \mapsto x$ $(X,d) \xrightarrow{id} (X,\rho)$

נשתמש במשפט (עיקרון היינה).

כש - $f = id$, אז $f^{-1}(O) = O$. לכן תנאי 3 מעיקרון היינה יהיה –

$$\forall O \in top(\rho): O \in top(d)$$

$$\Rightarrow top(\rho) \subseteq top(d)$$

תנאי 2 בעיקרון היינה נותן לנו ישירות את התנאי השני במשפט שלנו.

■

**<u>תוצאה:</u>** התנאים הבאים שקולים:

1) $top(d) = top(\rho)$.

2) $\rho \sim d$.

<u>הסבר:</u> נובע מיד ! שני כיוונים במשפט הקודם.

**<u>דוגמה:</u>**

1) $X = \mathbb{R}^n$ $\qquad$ $top(d_{max}) = top(d) = top(d_1)$

כי $\qquad$ $d_{max} \sim d \sim d_1$

2) $X = C[a,b]$ $(a < b)$ $\qquad$ $top(d_1) \subsetneq top(d_{max})$

- (מוכל) כי $d_{max}$ דומיננטי ביחס ל - $d_1$: $\qquad$ $d_1 \leq (b-a)d_{max}$

לכן לפי משפט ההשוואה נקבל שיש הכלה של הטופולוגיות.

- (לא שווה) כעת, יש **הכלה ממש** כי קיימת סדרה $f_n$ ב - $C[a,b]$ $(a < b)$ וגם סדרה $f$ ב - $C[a,b]$ כך ש $\quad$ $f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow} f$ , $f_n \overset{d_1}{\rightarrow} f$

ראינו דוגמה בהרצאה ב - $[0,1]$.