מבחן מועד ג' – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 19/07/16

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 20 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

משך המבחן: שלוש שעות.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sin^2(x)\right)\cdot e^{\sin(x)}}{x\cdot\ln(1+x)}$

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin(\sin^2(x))}{\sin^2(x)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2}_{\to 1^2}\cdot\underbrace{e^{\sin(x)}}_{\to e^0}\cdot\underbrace{\frac{x}{\ln(1+x)}}_{\to 1}=1$$

ב. $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x+1}$

$$\lim_{x\to\infty}(x+1)^{\frac{1}{x}}=\{\infty^0\}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^0$$

כאשר המעבר האחרון לפי סדרי גודל (אפשר לעשות לופיטל על מנת להיות בטוחים).

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n^2}}{3^{4n+1}}$

$$\frac{2^{(n^2)}}{3^{4n+1}}=\left(\frac{2^n}{3^{4+\frac{1}{n}}}\right)^n\to\left\{\left(\frac{\infty}{3^4}\right)^\infty\right\}=\infty$$

.2

א. חשבו את $\int\frac{\cos(x)}{\sin^4(x)+\sin^2(x)}dx$.

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_0^1\ln(x)dx$, אם כן חשבו אותו.

.3

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x^3+x=1$, והוכיחו תשובתכם.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x)=x^3+x-1$$

$$h'(x)=3x^2+1>0$$

לכן יש לכל היותר פתרון יחיד.

כעת נשים לב כי

$$h(0)=-1$$
$$h(1)=1$$

לפי ערך הביניים כיוון שהפונקציה רציפה כצירוף רציפות היא חותכת את הציר בין 0,1.

סה"כ פתרון יחיד

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x^3+x+\cos(x)=1$, והוכיחו תשובתכם.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$g(x)=x^3+x+\cos(x)-1$$

$$g'(x)=3x^2+1-\sin(x)>0$$

הסבר: לכל $x\neq 0$ מתקיים כי $3x^2>0$ והרי $1-\sin(x)\geq 0$

עבור $x=0$ מתקיים כי $g'(0)=1>0$

לכן הפונקציה g עולה (ממש) ויש לכל היותר פתרון אחד.

נשים לב כי

$$g(0)=0$$

ולכן קיים פתרון, והוא יחיד.

4. (אין קשר בין הסעיפים)

א. תהי פונקצית דיריכלה $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

תהי f פונקציה כלשהי המקיימת לכל $x\in\mathbb{R}$ כי $f(x)=f(D(x))$.

הוכיחו כי f פונקציה קבועה.

אם $x\in\mathbb{Q}$ אזי

$$f(x)=f(1)$$

אם $x\notin\mathbb{Q}$ אזי

$$f(x)=f(0)$$

נותר רק להוכיח כי $f(0)=f(1)$

$$f(0)=f\big(D(0)\big)=f(1)$$

ולכן הפונקציה קבועה.

ב. תהיינה f,g גזירות ב $[0,\infty)$ כך ש $f(0)=g(0)$ ולכל $x\in[0,\infty)$ מתקיים כי $f'(x)>g'(x)$.

הוכיחו כי לכל $x\in(0,\infty)$ מתקיים $f>g$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$$

לכן h עולה

כמו כן,

$$h(0) = f(0) - g(0) = 0$$

ולכן לכל $x > 0$ מתקיים כי $h(x) > h(0) = 0$ כפי שרצינו.

5. תהי סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ ותנאי ההתחלה $a_1 > 0$
   א. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה.

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n + 1 > 0$$

הרי זו פרבולה מרחפת $x^2 - x + 1 > 0$

   ב. חשבו את $\lim_{n\to\infty} a_n$.

<u>אם</u> הסדרה חסומה, כיוון שהיא עולה היא מתכנסת לגבול סופי שנסמנו $a_n \to L$

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim a_n^2 + 1$$

$$L = L^2 + 1$$

$$L^2 - L + 1 = 0$$

אין פתרונות למשוואה זו, ולכן קיבלנו סתירה.

לכן הסדרה אינה חסומה ומתקיים כי $a_n \to \infty$

6.
   א. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$.
   ב. חשבו את $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ עד רמת דיוק של $h = 0.01$.