

תרגיל 7

25 בדצמבר 2012

1. תהי G חבורה, $N \trianglelefteq G$, $N \leq H \leq G$.

(א) הוכח ש H/N היא תת-חבורה של G/N .

(ב) הראה שאם H היא תת-חבורה נורמלית של G , אזי $H/N \trianglelefteq G/N$.

2. תהי G חבורה, $H \leq G$, $N \trianglelefteq G$.

(א) הוכח $H \cap N$ היא תת-חבורה נורמלית של H .

(ב) לכל $aH \cap N \in H/H \cap N$ נגדיר $\phi(aH \cap N) = aN$. הוכח כי ϕ מוגדרת היטב. כלומר, אם $bH \cap N = aH \cap N$, אזי

$\phi(aH \cap N) = \phi(bH \cap N)$. זאת אומרת שהתמונה של ϕ אינה תלוייה בבחירת נציג מחלקת שקילות ובעצם מגדירה

פונקציה מ $H/H \cap N$ ל G/N .

(ג) הראה ש ϕ היא שיכון של $H/H \cap N$ בתוך G/N . (הומומורפיזם חח"ע מ $H/H \cap N$ ל G/N).

נצטט את משפטי האיזומורפיזם השני והשלישי.

משפט האיזומורפיזם השני: G חבורה, A, B תתי-חבורות של G ונניח ש $B \trianglelefteq G$. אזי AB חבורה, $A \cap B \trianglelefteq B$, $A \cap B \trianglelefteq AB$ ומתקיים $A/A \cap B \cong AB/B$.

משפט האיזומורפיזם השלישי: תהי G חבורה, $N, K \trianglelefteq G$, $N \trianglelefteq K$. אזי $K/N \trianglelefteq G/N$ ומתקיים:

$$G/N / K/N \cong G/K$$

בסדרת תרגילים הבאה תצטרכו להוכיח את המשפטים האלה. (לא להלחץ - ההוכחות הן קלות).

3. הנתונים - כמו במשפט האיזומורפיזם השני. נגדיר $\phi : A \rightarrow AB/B$ על ידי $\phi(a) = aB$.

(א) הראו ש ϕ הומומורפיזם.

(ב) הראו ש ϕ על.

(ג) הוכיחו ש $\ker \phi = A \cap B$.

(ד) בעזרת משפט איזומורפיזם הראשון הסיקו את משפט האיזומורפיזם השני: $A/A \cap B \cong AB/B$.

4. הנתונים כמו במשפט האיזומורפיזם השלישי. נגדיר $\phi : G/N \rightarrow G/K$ על ידי $\phi(aN) = aK$.

(א) הוכיחו ש ϕ מוגדרת היטב. זאת אומרת אם $g_1N = g_2N$ אזי $g_1K = g_2K$. כלומר $\phi(g_1N) = \phi(g_2N)$.

(ב) הוכיחו ש ϕ הומומורפיזם.

(ג) הוכיחו ש ϕ על.

(ד) הראו ש $\ker \phi = K/N$.

(ה) הפעילו את משפט האיזומורפיזם הראשון והסיקו את משפט האיזומורפיזם השלישי:

$$G/N / K/N \cong G/K$$

5. נזכיר, $K_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ היא תת-חבורה נורמלית של S_4 . לאיזו חבורה איזומורפית S_4/K_4 ?

רמז: השתמש במיון של חבורות מסדר 6.

6. מצא שיוך של חבורה הדיהדרלית D_n בתוך $GL_2(\mathbb{R})$.

רמז: תזכרו, שהחבורה הדיהדרלית נוצרת על ידי שיקוף וסיבוב. בתרגול, ראיתם איך ניתן לשכן סיבוב בתוך $GL_2(\mathbb{R})$ עכשיו, מצאו איך אפשר לשכן שיקוף ותראו שהחבורה שנוצרת על ידי סיבוב ושיקוף שמצאתם איזומורפית ל D_n .

7. תהינה H, G חבורות, $\phi: G \rightarrow H$ איזומורפיזם, $N \trianglelefteq G$ תת-חבורה של G . הוכיחו: $G/N \cong H/\phi(N)$.

8. תהי G חבורה, $H \trianglelefteq G$ מאינדקס p ראשוני. הוכיחו כי לכל $K \leq G$ מתקיים אחד מן השניים:

$$K \leq H \quad (\text{א})$$

$$[K : K \cap H] = p \vee G = HK \quad (\text{ב})$$

רמז: משפט האיזומורפיזם השני.

9. תהינה M, N תתי-חבורות נורמליות של G כך ש $MN = G$. הוכח ש $G/(M \cap N) \cong G/M \times G/N$.

רמז: מצא העתקה מ G ל $G/M \times G/N$ וחשב את הגרעין שלה. לאחר מכן, הפעל את משפט האיזומורפיזם הראשון.

10. תהי G חבורה. נגדיר אקספוננט של חבורה, $exp(G)$ להיות המספר המינימלי n כך שלכל $g \in G$, $g^n = 1_G$. אם לא קיים כזה, אומרים כי $exp(G) = \infty$.

$$exp(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}) \quad (\text{א}) \text{ חשב את}$$

(ב) נניח ש G ו H איזומורפיות. הוכח כי יש להן אותו אקספוננט.

11. תהי G חבורה. נסמן ב $Aut(G)$ את קבוצת כל האוטומורפיזמים מ G אל עצמה. (אוטומורפיזם = איזומורפיזם מ G אל עצמה).

(א) הוכח ש $Aut(G)$, יחד עם פעולת ההרכבה היא חבורה.

$$Aut(\mathbb{Z}_n) \cong U_n \quad (\text{ב}) \text{ הוכח:}$$

תזכורת: לכל $g \in G$, הגדרנו את ההצמדה על ידי $g: G \rightarrow G$ על ידי $x^g := gxg^{-1}$. הוכחתם שהצמדה היא אוטומורפיזם.

(ג) הוכח שאוסף ההצמדות על ידי איבר ב g היא תת-חבורה נורמלית של $Aut(G)$. חבורה זו נקראת חבורת האוטומורפיזמים הפנימיים של G . נסמן אותה ב $Inn(G)$.

(ד) הוכח ש $G/Z(G) \cong Inn(G)$. (רמז - משפט האיזומורפיזם הראשון).