

תרגיל מספר 8

1. מצאו את סדר האפס של כל אחת מהפונקציות הבאות בנקודות z_0 הנתונות. במידה והנקודה z_0 לא נתונה יש למצוא את סדר האפס בכל הנקודות בהן הפונקציה מתאפסת.

$$\text{א. } f(z) = \tan(z) \quad \text{ב. } g(z) = e^{z^2} - 1$$

$$\text{ג. } h(z) = z^2 \cdot \sin z - z \cdot \sin^2 z, z_0 = \pi$$

$$\text{ד. } w(z) = \sin(z^3) - \sin^3(z), z_0 = 0$$

2. עבור הפונקציות הבאות, קבעו האם לפונקציה, בנקודות הנתונות, יש סינגולריות סליקה, קוטב או עיקרית. במידה והסינגולריות היא קוטב קבעו מה הסדר של הקוטב.

$$\text{א. } f(z) = \cot z, z_k = \pi k$$

$$\text{ב. } g(z) = \frac{(z - \pi)^2}{\sin^5(z)} - \frac{1}{(1 + \cos z)^2}, z = \pi$$

$$\text{ג. } h(z) = \frac{1}{e^{\frac{1}{z}} - 1}, z_0 = 0, z_k = \frac{1}{2i\pi k} (k \neq 0)$$

$$\text{ד. } w(z) = \frac{(\cos^2(z) - 1)^4}{(e^{z^4} - 1 - z^4) \sin^2(z)}, z_0 = 0$$

3. פתחו לטור לורך את הפונקציות הבאות בנקודות הנתונות וקבעו בעזרת טור לורך את סוג הסינגולריות של הפונקציה (במידה והסינגולריות היא קוטב יש לקבוע מה הסדר שלו):

$$\text{א. } f(z) = e^{\frac{1}{z}} \cos\left(\frac{1}{z}\right), z = 0$$

$$\text{ב. } g(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)^2}, z = 2i$$

$$\text{ג. } h(z) = \frac{1}{1 - \cos z}, z = 0$$

הערה: בסעיף ג' מספיק למצוא את המקדמים c_n של טור לורך עבור $|n| \leq 2$.