לינארית 2 - פתרון מטלה 6 - ליכסון

תאריך הגשה: 12.4.2019

הנחיות:
יש לעלות למודל את קובץ התרגיל בפורמט PDF ברור וקריא!

תרגיל 1. [15 נקודות]מצאו P הפיכה ו-D אלכסונית כך ש- $\begin{pmatrix} 8 & 3 & -3 \\ -6 & -1 & 3 \\ 12 & 6 & -4 \end{pmatrix} P = PD$

פתרון. :

נשים לב שמדובר בליכסון של המטריצה $\begin{pmatrix} 8 & 3 & -3 \\ -6 & -1 & 3 \\ 12 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ כי

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & -3 \\ -6 & -1 & 3 \\ 12 & 6 & -4 \end{pmatrix} P = PD$$
$$\Downarrow$$
$$P^{-1} \begin{pmatrix} 8 & 3 & -3 \\ -6 & -1 & 3 \\ 12 & 6 & -4 \end{pmatrix} P = D$$

כדי ללכסן יש למצוא ע"ע וע"ו נעשה זאת

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= \left| \begin{pmatrix} \lambda-8 & -3 & 3 \\ 6 & \lambda+1 & -3 \\ -12 & -6 & \lambda+4 \end{pmatrix} \right| \\ &= (\lambda-8)\left[(\lambda+1)(\lambda+4)-18\right] - 6\left[-3(\lambda+4)+18\right] - 12\left[9-3(\lambda+1)\right] \\ &= (\lambda-8)\left[\lambda^2+5\lambda-14\right] - 6\left[-3\lambda+6\right] - 12\left[-3\lambda+6\right] \\ &= (\lambda-2)\left[(\lambda-8)(\lambda+7)+18+36\right] \\ &= (\lambda-2)^2(\lambda+1) \end{aligned}$$

ע״ע הם $\lambda = 2, -1$ כעת נמצא את הו״ע
$\lambda = -1$: צריך למצוא בסיס ל-

$$N\left[\begin{pmatrix} -9 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & -3 \\ -12 & -6 & 3 \end{pmatrix}\right] = Span\left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$$

$\lambda=2$: צריך למצוא בסיס ל-

$$N\left[\begin{pmatrix}-6&-3&3\\6&3&-3\\-12&-6&6\end{pmatrix}\right]=N\left[\begin{pmatrix}-6&-3&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]=span\left\{\left(\frac{1}{2},0,1\right),\left(-\frac{1}{2},1,0\right)\right\}$$

לכן

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}8&3&-3\\-6&-1&3\\12&6&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

כלומר $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ ו- $D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

תרגיל 2. [20 נקודות]עבור אילו ערכי a המטריצה $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&a\\1&1&1\end{pmatrix}$ אינה לכסינה

1. מעל $\mathbb{R}$
2. מעל $\mathbb{C}$

פתרון. :

ראשית נמצא את הע״ע של המטריצה

$$p_A(\lambda)=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-1&-a\\-1&-1&\lambda-1\end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2-a\right]=(\lambda-1)\left[\lambda-1+\sqrt{a}\right]\left[\lambda-1-\sqrt{a}\right]\lambda$$

לכן העע הם $\lambda=1,1-\sqrt{a},1+\sqrt{a}$

- אם $a>0$ אז יש לנו שלושה עע ממשיים שונים ולכן היא לכסינה ב-$\mathbb{R}$ וב-$\mathbb{C}$
- אם $a<0$ אז יש לנו שלושה עע מרוכבים שונים ולכן היא לכסינה ב- $\mathbb{C}$ אבל לא לכסינה ב-$\mathbb{R}$
- אם $a=0$ אז יש לנו עע אחד $(\lambda=1)$ הוא בעל ריבוי אלגברי 3 וריבוי גאומטרי 1 ולכן היא איננה לכסינה (לא ב-$\mathbb{C}$ ולא ב-$\mathbb{R}$)

תרגיל 3. [15 נקודות]עבור אילו ערכי k המטריצה $\begin{pmatrix}k+3&0&0\\-k-3&k&k+3\\-k-3&k&k+3\end{pmatrix}$ אינה לכסינה מעל $\mathbb{R}$

פתרון. :

ראשית נמצא את הע״ע של המטריצה

$$\begin{aligned}p_A(\lambda)&=\left|\begin{pmatrix}\lambda-(k+3)&0&0\\k+3&\lambda-k&-(k+3)\\k+3&-k&\lambda-(k+3)\end{pmatrix}\right|=(\lambda-(k+3))\left[(\lambda-k)(\lambda-(k+3))-k(k+3)\right]=\\&=(\lambda-(k+3))\left[(\lambda-k)(\lambda-(k+3))-k(k+3)\right]=\lambda(\lambda-(k+3))(\lambda-(2k+3))\end{aligned}$$

לכן העע הם $\lambda=0,k+3,2k+3$

אם $k\neq-3,0,-\frac{3}{2}$ כל הע״עים שונים לכן היא לכסינה.

- עבור $k=-3$ הע״עים הם $\lambda=0,0,-3$ הריבוי הגאומטרי של 0 שווה לריבוי האלגברי (שווה ל-2) ולכן היא לכסינה.
- עבור $k=0$ הע״עים הם $\lambda=0,3,3$ הריבוי הגאומטרי של 3 שווה 1 בעוד שהריבוי האלגברי שווה ל-2ולכן היא לא לכסינה.

- עבור $k=-\frac{3}{2}$ הע״עים הם $\lambda=0,\frac{3}{2},0$ הריבוי הגאומטרי של 0 שווה 1 בעוד שהריבוי האלגברי שווה ל-2 ולכן היא לא לכסינה.
לסיכום המטריצה לא לכסינה עבור $k=0,-\frac{3}{2}$

תרגיל 4. [15 נקודות]חשב את את A^{-2},A^{12} עבור המטריצה (רמז : משפט קיילי המילטון)

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון. הפ״א הוא

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| \\ &= \lambda\left|\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right|-\left|\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}\right| \\ &= \lambda^3-1 \end{aligned}$$

לפי קיילי המילטון

$$A^3=I$$

כלומר $A^{-2}=A$

בנוסף

$$A^{12}=\left(A^3\right)^4=I^4=I$$

תרגיל 5. [20 נקודות]תהי A מטריצה נילפוטנטית(כלומר קיים k כך ש-$A^k=0$), מצא את הע"ע שלה.

פתרון. יהי λ הוא ע״ע של A ו-k הוא סדר הנילפונטניות של A אז λ^k הוא עע של $A^k=0$ לכן

$$\begin{gathered} 0=A^kv=\lambda^kv \\ \Downarrow \\ 0=\lambda \end{gathered}$$

תרגיל 6. [15 נקודות]תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה כלשהי, הראה שקיימות מטריצות הפיכות B,C כך ש-$A=B+C$

פתרון. יהי $p\left(x\right)$ הפולינום האופייני של A, הדרגה שלו היא n לכן יש לכל היותר n שורשים שונים ב-$\mathbb{R}$ ניקח מספר $c\neq 0$ שאינו ע"ע לכן

$$A=(A-cI)+cI$$

נסמן $B=A-cI$ הפיכה כי c אינו ע"ע ו-$C=cI$ הפיכה כי c שונה מ-0.

בהצלחה!!