לינארית להנדסה- פתרון תרגיל 6

תרגיל 1.

1. נתון שהמטריצה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ מתקיים $A^2+5A+6I=0$ הוכיחו כי A הפיכה.

פתרון.

$$\begin{gathered} A^2+5A+6I=0 \\ \Downarrow \\ A^2+5A=-6I \\ \Downarrow \\ A\left(A+5I\right)=-6I \\ \Downarrow \\ A\left(-\frac{1}{6}A-\frac{5}{6}I\right)=I \end{gathered}$$

כלומר A הפיכה ומתקיים $A^{-1}=-\frac{1}{6}A-\frac{5}{6}I$

2. תהי $A \in M_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ כך ש-A מאפסת את x^2+x כלומר $A^2+A=0$ האם A בהכרח אינה הפיכה?**לא נכון, ניקח את** $A=-I$ **ונקבל**

$$A^2+A=\left(-I\right)^2+\left(-I\right)=0$$

תרגיל 2. כתבו את המטריצה $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ וההופכית שלה (אם קיימת) כמכפלה של מטריצות אלמנטריות

פתרון.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}]{R_1 \leftrightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_2=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}]{-R_1 \rightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}]{R_2 - 5R_1 \rightarrow R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}]{R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[E_5=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}]{R_3 - \frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[E_6=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}]{-\frac{1}{10}R_2 \rightarrow R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[E_7=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}]{2R_3 \rightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_8=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}]{R_2 + \frac{1}{10}R_3 \rightarrow R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_9=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}]{R_1 - 3R_2 \rightarrow R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

מכאן ניתן להסיק ש-

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}E_5^{-1}E_6^{-1}E_7^{-1}E_8^{-1}E_9^{-1}$$

ו-

$$A^{-1} = E_9E_8E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1$$

תרגיל 3. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש-A הפיכה. הוכח או הפרך:

1. למערכות $\begin{array}{rcl} ABx & = & 0 \\ Ax & = & 0 \end{array}$ אותם פתרונות.

פתרון.

לא נכון, היות ו-A הפיכה למערכת $Ax=0$ יש רק את פתרון האפס בעוד של-$ABx=0$ יכולים להיות פתרונות נוספים.

ניקח לדוגמא $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ אז $x=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ פותר את המערכת $ABx=0$, אך אינו פותר את המערכת $Ax=0$

2. למערכות $\begin{array}{rcl} BAx & = & 0 \\ A^{-1}x & = & 0 \end{array}$ אותם פתרונות.

פתרון.

לא נכון, היות ו-A^{-1} הפיכה למערכת $A^{-1}x=0$ יש רק את פתרון האפס בעוד של-$BAx=0$ יכולים להיות פתרונות נוספים.

ניקח לדוגמא $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A=A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ אז $x=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ פותר את המערכת $BAx=0$, אך אינו פותר את המערכת $A^{-1}x=0$

3. לכל ווקטור $b\neq 0$ למערכות $\begin{array}{rcl} ABx & = & b \\ BAx & = & b \end{array}$ אותם פתרונות.

פתרון.

לא נכון, ניקח $x=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ אז

$$BAx=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=b$$

בעוד ש-

$$ABx=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=b$$

תרגיל 4. הוכח או הפרך:

1. אם $A^2=0$ אז $A=0$

פתרון.

לא נכון, ניקח $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=A$ אך $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. אם $A^2=I$ אז $A=I$

פתרון.

לא נכון, ניקח $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=A$ אך $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

תרגיל 5. תהיינה A ו-B מטיצות ריבועיות מאותו סדר, כך שמתקיים $A^3=I$ ו-$BA=A(A+I)$ הוכיחו שמתקיים

1. $A^{-1}=A^2$

פתרון.

$$A^3=I \quad\Rightarrow\quad AA^2=I$$

כלומר A הפיכה ומתקיים $A^{-1}=A^2$

2. $B=A+I$

פתרון.

$$B=BAA^{-1}=A\left(A+I\right)A^{-1}=AAA^{-1}+AIA^{-1}=A+I$$

3. $BABA=A^2B^2$

פתרון.

$$BABA=\left(A\left(A+I\right)\right)^2=\left(A^2+A\right)^2=A^4+2A^3+A^2=A^2\left(A+I\right)^2=A^2B^2$$

שאלה 6. האם הקבוצות הבאות הן תתי מרחבים?

1. האם $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ :\ z^2=x^2+y^2\right\}$ (נסו לחשוב מה הצורה הזאת מתאר) הוא תת מרחב ווקטורי של $\mathbb{R}^3$ ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?

פתרון.

לא תת מרחב, ניקח

$$u=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\in V,\ v=\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}\in W$$

אך החיבור

$$u+v=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\notin W$$

הצורה הזאת היא קונוס

2. האם $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ :x^2+y^2+z^2\leq 36\right\}$(נסו לחשוב מה הצורה הזאת מתאר) הוא תת מרחב ווקטורי של $\mathbb{R}^3$ ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?

פתרון.

לא תת מרחב, ניקח

$$u=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in W$$

אך עם נכפיל ב-6 נקבל

$$6u=\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}\notin W$$

הצורה הזאת כדור (עם הפנים) בעל רדיוס 6

3. האם $W=\left\{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}\ :a_{12}=a_{21}=0\right\}$ הוא תת מרחב ווקטורי של $\mathbb{R}^{2\times2}$ ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?

פתרון.

כן, הוא תת מרחב, יהיו $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}\in W,\alpha\in\mathbb{R}$ אז

$$u+\alpha v=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+\alpha b_{11}&a_{12}+\alpha b_{12}\\a_{21}+\alpha b_{21}&a_{22}+\alpha b_{22}\end{pmatrix}$$

ומתקיים

$$\begin{cases}a_{11}+\alpha b_{11}&=&0+\alpha0&=&0\\a_{22}+\alpha b_{22}&=&0+\alpha0&=&0\end{cases}$$

לכן $A+\alpha B\in W$

ו-$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in W$

4. האם $W=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}\ :tr\left(A\right)=0\}$ הוא תת מרחב ווקטורי של $\mathbb{R}^{n\times n}$ ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?

פתרון.

כן, הוא תת מרחב, יהיו $A,B\in W,\alpha\in\mathbb{R}$ אז

$$tr\left(A+\alpha B\right)=tr\left(A\right)+tr\left(\alpha B\right)=tr\left(A\right)+\alpha tr\left(B\right)=0+\alpha0=0$$

ו-

$$\begin{pmatrix}0&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&0\end{pmatrix}\in W$$

כי

$$tr\begin{pmatrix}0&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&0\end{pmatrix}=0$$

תרגיל 7. יהי V מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהיו $u,v,w\in V$ בהינתן ש-u אינו וקטור ה-0, האם נכון לומר ש-

$$span\left(\{u\}\right)=span\left(\{u,v\}\right)\bigcap span\left(\{u,w\}\right)$$

פתרון.

לא נכון,

יהיו $V=\mathbb{R}^2$ ו-$w=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\in V,\ v=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in V,\ u=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in V$ אז

$$\begin{aligned}span\left(\{u\}\right)&=\left\{\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}:a\in\mathbb{R}\right\}\\ &\neq\\ span\left(\{u,v\}\right)\bigcap span\left(\{u,w\}\right)&=\mathbb{R}^2\end{aligned}$$

תרגיל 8. מה צריך להיות k כדי שהקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}k\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ תהיה תלוייה לינארית מעל $\mathbb{R}$?

פתרון.

נחפש k כך שלמערכת $\alpha\begin{pmatrix}k\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\k\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ יהיה פתרון לא טריוואלי

$$\left(\begin{array}{ccc|c}k&0&0&0\\1&1&1&0\\1&k&1&0\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\k&0&0&0\\1&k&1&0\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&-k&-k&0\\0&k-1&0&0\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&1&0\\0&k-1&0&0\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&-k+1&0\end{array}\right)$$

כאשר $k=1$ יש פתרון לא טריוואלי. במהלך הדירוג חילקנו ב-k לכן יש לבדוק מה קורה למטריצה עבור $k=0$ בשלב לפני החלקה ונקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\end{array}\right)$$

וגם כאן יש פתרון לא טריוואלי. לסיכום, עבור $k=0,1$ הווקטורים תלווים לינארית.

תרגיל 9. יהי $V=\mathbb{R}_3\left[x\right]$ מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-3, ותהי

$$U=\left\{p\left(x\right)\in V\mid p\left(x\right)=x\cdot p'\left(x\right)\right\}$$

תת קבוצה של V. ($p'\left(x\right)$ היא הנגזרת של $p\left(x\right)$)

1. הוכיחו ש-U תת מרחב של V.

פתרון.

- שייכות של וקטור ה-0: יהי $0\left(x\right)$ פולינום ה-0 והוא מקיים $0\left(x\right)=x\cdot 0'\left(x\right)$ לכן $\left\{0\left(x\right)\right\}\in U$
- סגירות: יהי $p\left(x\right),q\left(x\right)\in U$ פולינומים מקיימים $p\left(x\right)=x\cdot p'\left(x\right),\ q\left(x\right)=x\cdot q'\left(x\right)$ ו-$\alpha\in\mathbb{R}$ אז

$$p\left(x\right)+\alpha q\left(x\right)=x\cdot p'\left(x\right)+\alpha x\cdot p'\left(x\right)=x\cdot\left(p'\left(x\right)+\alpha\cdot p'\left(x\right)\right)=x\cdot\left(p\left(x\right)+\alpha\cdot p\left(x\right)\right)'$$

מכאן $p\left(x\right)+\alpha q\left(x\right)\in U$ ולכן U הוא תת מרחב של V

2. מצאו בסיס ומימד ל-U.

פתרון.

$$\begin{aligned}
&U &=\\
&\left\{p\left(x\right)=a+bx+cx^2+dx^3\in V\mid a+bx+cx^2+dx^3=x\cdot\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)\right\} &=\\
&\left\{p\left(x\right)=a+bx+cx^2+dx^3\in V\mid a+bx+cx^2+dx^3=bx+2cx^2+3dx^3\right\} &=\\
&\left\{p\left(x\right)=a+bx+cx^2+dx^3\in V\mid a=0,c=0,d=0\right\} &=\\
&\left\{p\left(x\right)=bx:\ b\in\mathbb{R}\right\} &=\\
&Span\left\{x\right\}
\end{aligned}$$

המימד הוא 1

תרגיל 10. יהיו $U,\ W$ תתי מרחבים וקטורים של V. יהיו $u,v,w\in V-\left\{0\right\}$ כך ש-

- $u\in U,\ u\notin W$
- $w\in W$
- $v\in W$ ו-v אינו כפולה סקלרית של w

הוכיחו ש-v אינו צירוף לינארי של u ו-w.

פתרון.

נניח בשלילה ש-v צירוף לינארי של u ו-w, כלומר קיימים $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ כך ש- $v=\alpha u+\beta w$, מכאן $\alpha u=v-\beta w$, נשים לב ש- $v,\beta w\in W$. ידוע ש- W סגור לחיבור וכפל בסקלר בשל היותו תת מרחב וקטורי לכן

$$u=\frac{1}{\alpha}\alpha u=\frac{1}{\alpha}\left(v-\beta w\right)\in W$$

סתירה לכך ש-$u\notin W$

תרגיל 11.

1. יהי $V=\left\{A\in\mathbb{R}^{3\times3}|A=A^t\right\}$ האם קיימים 4 תתי מרחבים לא טריוויאלים V_1,V_2,V_3,V_4 של V כך ש-

$$\left\{0\right\}\subset V_1\subset V_2\subset V_3\subset V_4\subset V$$

? (הכלה חזקה)

פתרון.

למעשה את המרחב V ניתן לרשום כ-

$$V=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{pmatrix}:\ a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}\right\}$$

שהוא מרחב בעל מימד 6 הנפרש על ידי

$$V = Span\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=A_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A_4}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A_5}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A_6} \right\}$$

אם ניקח

$$\begin{aligned} V_1 &= Span\{A_1\} \\ V_2 &= Span\{A_1, A_2\} \\ V_3 &= Span\{A_1, A_2, A_3\} \\ V_4 &= Span\{A_1, A_2, A_3, A_4\} \end{aligned}$$

אז מתקיים

$$\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset V_4 \subset V$$

2. יהי $V = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} | A = A^t\right\}$ האם קיימים 4 תתי מרחבים לא טריוויאלים V_1, V_2, V_3, V_4 של Vכך ש-

$$\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset V_4 \subset V$$

?(הכלה חזקה) רמז: אם $W \subset V$ תת מרחב של V אז $dim(W) < dim(V)$

פתרון.

למעשה את המרחב V ניתן לרשום כ-

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

שהוא מרחב בעל מימד 3 הנפרש על ידי

$$V = Span\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=A_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A_3} \right\}$$

כאמור כאן המימד 3 ולכן לא ניתן "לדחוס" שרשרת של 4 תתי מרחבים.

הוכחה פורמלית: נניח בשלילה שקיימים תתי מרחבים כאלו

$$\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset V_4 \subset V$$

לכן

$$0 < dim(V_1) < dim(V_2) < dim(V_3) < dim(V_4) < 3$$

אך הדבר לא יתכן היות ו-$dim(V_i)$ הוא מספר שלם.

בהצלחה!!