אינפי II תיכוניסטים - תרגול I

מנהלות: הדר קנר - hadara98@gmail.com

שעת קבלה בתיאום מראש במייל.

ציון: 10% - תרגילים יבשים: יש להגיש **לפחות** 70% (מעוגל כלפי מעלה)

10% - תרגיל XI

80% - ציון מבחן

טורי טיילור

משפט - יחידות הצגה של פי רספים נגזרות

נניח ש- $f^{(n)}(0)$ קיימת. אזי קיימת הצגה יחידה $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + r_n(x)$

כך ש- $\frac{r_n(x)}{x^n} \to 0$ כאשר $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ ($r_n(x)$ נקרא משגר $o(x^n)$)

הגדרה - טור טיילור ומקלורין

עבור הפו' $f(x)$ הגזירה אינסוף פעמים, נגדיר את טור טיילור שלה סביב הנק' x_0:

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

עבור $x_0 = 0$ הטור יקרא טור מקלורין של f

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

<u>תרגיל</u>

חשבו את טורי מקלורן של הפו' הבאות:

I $f(x) = e^x$ (רק לציין):

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

II $f(x) = \sin x$ (לחשב כמעט):

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

$$\vdots$$

הטור:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

שימו לב: $\sin x$ היא פו' אי זוגית ולכן החזקות כאלו "שנשארו" הן אי זוגיות.

III $f(x) = \cos x$ (רק לציין):

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n}$$

ח $f(x) = \ln(x+1)$ (לפי נוסחה 3):

$$f(x) = \ln(x+1) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2\cdot 3}{(x+1)^4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -3!$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

לכן: $$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n!\, x^{n+1}$$

ט $f(x) = \frac{1}{1-x}$ (לפי שו"ת 3):

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \Rightarrow f''(0) = 2!$$

$$f'''(x) = \frac{2\cdot 3}{(1-x)^4} \Rightarrow f'''(0) = 3!$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n)}(0) = n!$$

לכן:
$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n\geq 0} x^n$$

למעשה, טענו כבר את הנוסחא הצלת (סכום טור הנדסי) ואנו יודעים שהיא נכונה רק עבור $-1 < x < 1$

VI $f(x) = \frac{1}{1+x}$ (רק לדיון):

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

הערה

מתמטיקן מהון טור הטיילור של הפו' אינו מתכנס אליה. לדוגמה: הטור של $\frac{1}{1-x}$ מתכנס לפו' רק כאשר $-1 < x < 1$. מתקיים:

$$f(x) = T(x) \iff r_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

תרגיל

בעזרת התרגיל הקודם חשבו את טור מקלורין של $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ואת $f^{(103)}(0)$

נשים לב ש-
$$T_{\frac{1}{1+x}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad f(x) = \frac{x}{1+x^2} = x \cdot \frac{1}{1+(x^2)^1}$$

לכן:
$$T(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}$$

ולפי יחידות ההצגה ניתן לומר שזה טור מקלורין של הפו'. כסביר לפי הנוסחא של טור מקלורין, המקדם של x^{103} שווה ל- $\frac{f^{(103)}(0)}{103!}$, ומצד שני, הוא שווה ל- $(-1)^{51} = -1$, לכן

$$f^{(103)}(0) = -103!$$

תרגיל

חשבו את טור מקלורן של הפו' $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$

נזכר ש- $T_{\frac{1}{1-x}}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

ו- $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x}$

לכן

$$T(x)=(1+x+x^2+x^3+\dots)\cdot(1+x+x^2+x^3+\dots)$$

נשים לב שלאחר פתיחת הסוגריים, x^n נוצר $n+1$ פעמים: הרי לכל $0\le i\le n$, $x^i\cdot x^{n-i}=x^n$

ולכן המקדם של x^n יהיה $n+1$ ובסה"כ:

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot x^n$$

לפי יחידות ההצגה נקבל שזהו טור מקלורן של הפו'.

(בהמשך הקורס נלמד שיטה מעניינת יותר לחשב את טור מקלורן של הפו' ע"י גזירה איבר-איבר)

תרגיל

מצאו את טור טיילור של $f(x)=\cos x$ סביב $x=\frac{\pi}{4}$

נשתמש בנוסחה $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ ונקבל:

$$\cos(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{2n!}-\frac{(-1)^n\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

משפט (שארית לגרנז')

נניח $f(x)$ גזירה $n+1$ פעמים. אזי מתקיים:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

כאשר c הוא נק' בין x_0 ל- x. $r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ נקראת

שארית לגרנז' עבור n.

תרגיל

חשבו את $\ln 1.5$ בדיוק של 10^{-2}

נגדיר $f(x)=\ln(1+x)$. אז ניתן לראות כי

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$$

$$\Downarrow$$

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

לפי משפט שארית לגרנז' היא מהצורה

$$|r_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\left|\frac{\frac{(-1)^n n!}{(1+c)^{n+1}}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\frac{1}{(n+1)(1+c)^{n+1}}|x^{n+1}|$$

עבור הנק' $x=\frac{1}{2}$, $0\le c\le\frac{1}{2}$. מתקיים:

$$\left|r_n\left(\tfrac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{(n+1)(1+c)^{n+1}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\underset{0\le c\le\frac{1}{2}}{\le}\frac{1}{(n+1)\cdot 1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\underset{\text{נדרוש}}{\le}10^{-2}$$

כלומר, נמצא $n\in\mathbb{N}$ כך ש:

$$100 < (n+1)2^{n+1}$$

עבור $n=4$ מתקיים הדרוש ולכן צריך לפתח את הטור עד סדר 4, משמע:

$$\ln 1.5 \approx 0.5 - \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{3} - \frac{0.5^4}{4} = 0.401$$

עם שגיאה לכל היותר של 10^{-2}.