

תרגיל בית 9 בקורס 89-214 סמסטר א' תשע"ד

נהלים: בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך ההגשה הוא בשבוע המתחיל ב-19.1.2014 לתא 45 של חיים רוזנר בארון הימני.

שאלה 1. מביין שבע החבורות הבאות מסדר 40 מצאו איזו חבורות איזומורפיות אחת לשניה:

$$D_{10} \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_8, U_8 \times \mathbb{Z}_{10}, U_{10} \times \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{40}$$

רמז: העזרו במשפט המיון לחבורות אבליות נוצרות סופית.

שאלה 2. תהי G חבורה. נסמן קבוצה של איברים $G^2 = \{g^2 : g \in G\}$. שימו לב שבחבורה חיבורית זו בעצם הקבוצה $2G = \{2g : g \in G\}$, והוכחתם בתרגיל הבית השני שזו חבורה אבלית אם G אבלית. נזכיר כי האקספוננט של חבורה הוא המספר הטבעי N הקטן ביותר כך ש- $a^N = e$ לכל $a \in G$, ומסמנים $\exp(G) = N$.
האם קיימת חבורה אבלית G כך שמתקיימים כל התנאים הבאים: $\exp(G) = 4$, $|G| = 32$,
 $[G : G^2] = 4$?

שאלה 3.

1. מצאו את מחלקות הצמידות השונות בחבורה S_6 . אין צורך לכתוב את האיברים בכל מחלקת צמידות.

2. מצאו את $\exp(S_3)$ ואת $\exp(S_5)$.

שאלה 4. מצאו את כל החבורות האבליות מסדר 720 עד כדי איזומורפיזם. רמז: ידוע כי $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.

שאלה 5. השתמשו במשפט קיילי על מנת להציג את U_{14} כתת-חבורה של S_6 .

שאלה 6. כעת נראה שקיים זוג של חבורות לא איזומורפיות המשוכנות אחת בתוך השנייה. נזכיר כי שיכון הוא מונומורפיזם, ונאמר כי חבורה A משוכנת בחבורה B אם קיים שיכון $f : A \rightarrow B$.

נסמן $G = \bigcup_{n \geq 5} S_n$ איחוד כל חבורות הסימטריה S_n עבור $n \geq 5$, ונסמן $H = \bigcup_{n \geq 5} A_n$ איחוד כל חבורות החילופין A_n עבור $n \geq 5$.

הערה. אנו יכולים לראות את S_n כתת-חבורה של S_{n+1} לפי השיכון הסטנדרטי, השולח תמורה σ של n איברים לתמורה $\hat{\sigma}$ של $n+1$ איברים לפי $\hat{\sigma}(i) = \sigma(i)$ לכל $1 \leq i \leq n$ ומקבע את האיבר האחרון $\hat{\sigma}(n+1) = n+1$. להמשך התרגיל נשתמש בנקודת מבט זו כשנדון בחבורות G ו- H .

