<u>פתרון בוחן דמה</u> – אנליזה 1 למורים

1. (30 נק')

נביט בסדרה a_n המוגדרת על ידי כלל הנסיגה

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 \\ a_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

<u>פתרון</u>:

מהתבוננות באיברים הראשונים של הסדרה, אנו מנחשים כי מדובר בסדר מונוטונית עולה.

נוכיח שהיא אכן מונוטונית עולה. נוכיח כי לכל n מתקיים כי $a_{n+1} > a_n$.

בדיקה: עבור n=1 מתקיים כי $a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2} = a_1$.

שלב האינדוקציה: יהי n עבורו $a_{n+1} > a_n$, צ"ל כי $a_{n+2} > a_{n+1}$.

כלומר, צ"ל כי $\left(a_{n+1}\right)^2 > \left(a_n\right)^2$ כיוון שאיברי הסדרה חיוביים זה נובע מהעלאת שני אגפי הנחת האינדוקציה ($a_{n+1} > a_n$) בריבוע.

כעת עלינו למצוא חסם מלעיל. על מנת לנחש מהו חסם המלעיל, נראה מה יהיה הגבול במידה והסדרה תתכנס. אם הסדרה מתכנסת, נסמן $a_n \to L$ ולכן לפי נוסחת הנסיגה $L = L^2$.

הפתרונות האפשריים הינם $L = 0,1$.

כיוון שהסדרה מתחילה בחצי ועולה, הגבול 0 נפסל, ולכן הגבול האפשרי הוא 1. נוכיח כי הסדרה חסומה מלעיל על ידי 1, כלומר לכל n מתקיים $a_n < 1$.

בדיקה: עבור n=1 מתקיים כי $a_1 = \frac{1}{2} < 1$.

שלב האינדוקציה: יהי n עבורו $a_n < 1$, צ"ל $a_{n+1} < 1$.

כלומר, צ"ל $a_n^2 < 1$. אבל שוב, כיוון שאיברי הסדרה חיוביים זה נובע מהעלאת שני אגפי הנחת האינדוקציה ($a_n < 1$) בריבוע.

סיכום: הסדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ולכן מתכנסת לגבול ממשי, וכפי שהוכחנו גבול זה חייב להיות 1.

2. (50 נק')

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\left(1+x\sin(x)\right)^{\frac{1}{x}}$

פתרון:

ראשית קל לראות כי פונקציית הבסיס שואפת ל1, כיוון שגם x וגם $\sin(x)$ שואפות לאפס כאשר $x\to 0$.

לכן מותר להשתמש בנוסחה הבאה:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\sin(x)\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to 0}\left(1+x\sin(x)-1\right)\frac{1}{x}}$$

אבל $\lim_{x\to 0}\left(1+x\sin(x)-1\right)\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\sin(x)=0$

ולכן התשובה הסופית לגבול הינה $e^0=1$

ב. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

פתרון:

ראשית נשים לב כי מדובר במצב הבעייתי של אינסוף פחות אינסוף.

נכפול ונחלק בצמוד ונקבל:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\overset{\frac{1}{\infty}}{=}0$$

ג. $\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-1\right)^2\cdot\ln\left(1+3x\right)}{\left(1-\cos(2x)\right)\cdot x}$

פתרון:

נסדר את הביטוי מחדש ונקבל

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-1\right)^2\cdot\ln\left(1+3x\right)}{\left(1-\cos(2x)\right)\cdot x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)^2\frac{\ln\left(1+3x\right)}{3x}\frac{\left(2x\right)^2}{1-\cos(2x)}\frac{\left(2x\right)^2\cdot 3x}{\left(2x\right)^2\cdot x}=1^2\cdot 1\cdot 2\cdot 3=6$$

ד. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\sin^2(\mathrm{n})}$

פתרון:

נשתמש במשפט הסנדביץ:

$$1=\sqrt[n]{1}\le\sqrt[n]{1+\sin^2(\mathrm{n})}\le\sqrt[n]{2}\to 1$$

ולכן גבול הסדרה הינו 1.

קבעו האם הטור הבא מתכנס:

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n^2}}{5^n}$

פתרון:

נפעיל את מבחן השורש להתכנסות טורים חיוביים.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^{n^2}}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{5}=\infty>1$$

ולכן הטור מתבדר.

3. (40 נק')

א. תהיינה סדרות a_n, b_n כך ש $b_n \to 0$ ובנוסף $\frac{a_n}{b_n} \to 1$. **הוכיחו/הפריכו**: $a_n \to 0$.

<u>**הוכחה**</u>:

$$a_n = b_n \cdot \frac{a_n}{b_n} \to 0 \cdot 1 = 0$$

ב. תהי סדרה a_n עבורה $|a_{n+1} - a_n| \to 0$. **הוכיחו/הפריכו**: a_n מתכנסת לגבול סופי.

<u>**הפרכה**</u>:

נבחר את הסדרה $a_n = \sqrt{n}$. כעת

$$|a_{n+1} - a_n| = \left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0$$

אך הסדרה שואפת לאינסוף ולא מתכנסת לגבול סופי.

<u>הערה</u>: ההפרש בין איברי הסדרה שואף לאפס אך הסדרה שואפת לאינסוף.

באופן כללי, אפשר לחשוב על הסדרה כסדרת סכומים חלקיים של כל ההפרשים בין שני איברים עד כה.

כלומר השאלה שקולה לשאלה – "האם קיים מתבדר שהסדרה שלו שואפת לאפס?"

מי שלומד טורים קצת יותר לעומק רואה אינספור דוגמאות למקרה זה.

ג. תהי סדרה a_n המתכנסת לגבול סופי, כך שלכל n מתקיים $a_n > L$. **הוכיחו/הפריכו**: $\lim_{n\to\infty} a_n > L$

<u>**הפרכה**</u>:

למעשה **כל** סדרה מונוטונית יורדת (לא קבועה) היא הפרכה לשאלה זו.

לדוגמא: $a_n = \frac{1}{n} > 0$ אך $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

כלומר, המשפט הנכון לגבי סדרות הוא - אם לכל n מתקיים $a_n > L$ אזי $\lim_{n\to\infty} a_n \geq L$.