

פונקציות מרוכבות תרגיל 1

1. נתון המספר המרוכב $z = [(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i](1 + \sqrt{3}i)$. הביאו לצורה קוטבית את

המספרים הבאים:

א. $\frac{1}{z}$

ב. z^{17}

ג. $(\bar{z})^{17}$

ד. חשבו את $b = \text{Im}(z^{2n})$, עבור כל $n \in \mathbb{Z}$.

2. פתרו את המשוואות הבאות. (יש לתת את כל הפתרונות):

א. $z^6 - (1 - i)^3 = 0$

ב. $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 = 2$

ג. (רמז: השתמשו בזהירות בנוסחה של סדרה הנדסית)

ד. $(z-i)^n + 2(z-i)^{-n} + 2 = 0$

3. העזרו ב"נוסחת אוילר" $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ כדי לחשב את הסכומים הבאים:

א. $S_n = \sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta$

ב. $S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \cos \theta + \binom{n}{2} \cos 2\theta + \dots + \binom{n}{n} \cos n\theta$

4. הוכיחו, על ידי חישוב מפורט, כי אם $|z|=1$, אזי $\frac{z+1}{z-1}$ הוא מספר מדומה טהור. יש

לרשום $z = x + yi$, ולעבוד עם x, y .

5. שרטטו את קבוצות הנקודות הבאות במישור המרוכב:

א. $A = \{z : |z + 2 - 3i| \leq 3\}$

ב. $B = \{z : |z - 1| + |z + 1| = 3\}$

רמז: המרחק בין המספרים המרוכבים $z, w \in \mathbb{C}$ הוא $d(z, w) = |z - w|$.