

פתרון בוחן בקורס מבנים אלגבריים 89-214 סמסטר א' תשפ"ג

מרצה: ד"ר ארז שיינר

מתרגלים: תומר באואר ודניאל עומר

הוראות:

- יש לענות על כל השאלות.
- כתבו את תשובותיכם על גבי טופס הבחינה. ניתן להשתמש בשני צידי הדף. מחברת הטיוטה לא תיבדק.
- משך הבוחן: 90 דקות.
- סך הנקודות עולה על 100, אך הציון המקסימלי בבוחן הינו 100.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד (וגם אותו לא ממש צריך).

בהצלחה!

שאלה 1. (10 נק' לסעיף) בכל סעיף הקיפו את התשובה הנכונה לדעתכם והוסיפו נימוק קצר בהמשך. נימוק קצר לרוב יכול רק שניים או שלושה משפטים.

א. כל חבורה מסדר 89214 מכילה איבר מסדר 2.

נכון לא נכון

ב. אם n ו- m לא זרים, אז הסדר הגדול ביותר לאיבר ב- $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ הוא $\max(n, m)$.

נכון לא נכון

ג. קיים אפימורפיזם (הטלה) $f: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9 \rightarrow \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

נכון לא נכון

ד. קיים מונומורפיזם (שיכון) $f: \mathbb{Z}_{20} \rightarrow S_9$.

נכון לא נכון

ה. קיימות שלוש חבורות G_1, G_2, G_3 מסדר 60 ושהן לא איזומורפיות זו לזו בזוגות.

נכון לא נכון

ו. מספר תת-החבורות מסדר 3 של $S_3 \times S_3$ הוא

2 • 3 • 4 • 12 •

פתרון.

א. נכון. כל חבורה מסדר זוגי מכילה איבר מסדר 2.

ב. לא נכון. למשל 4 ו-6 אינם זרים כי $\gcd(6, 4) = 2$, אבל האיבר $(1, 1) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4$ הוא מסדר 12.

ג. לא נכון. אילו היה קיים כזה אפימורפיזם, אז החבורות האלו היו איזומורפיות כי שתיהן מסדר סופי 27. אבל בראשונה יש איברים מסדר 9, כמו $(0, 1)$, ובאחרת כל האיברים מסדר המחלק את 3.

ד. נכון. החבורה \mathbb{Z}_{20} ציקלית מסדר 20, ולכן מספיק למצוא תת-חבורה ציקלית מסדר 20 של S_9 . ישנם איברים מסדר 20 ב- S_9 כמו $(1, 2, 3, 4, 5)(6, 7, 8, 9)$. $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)(6, 7, 8, 9)$ אז f המוגדר לפי $f(i) = \sigma^i$ מתאים לשאלה.

ה. נכון. למשל \mathbb{Z}_{60} לא איזומורפית ל- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{30}$ כי הראשונה ציקלית והשנייה לא. שתיהן אבליות, ולכן לא איזומורפיות ל- A_5 שאינה אבלית. ישנן אפשרויות נוספות, למשל גם $A_4 \times \mathbb{Z}_5$ ו- $S_3 \times \mathbb{Z}_{10}$ הן לא אבליות ולא איזומורפיות לאף אחת מהחבורות הקודמות, כי הסדר המרבי לאיבר ב- A_5 הוא 5, ב- $A_4 \times \mathbb{Z}_5$ הוא 15 וב- $S_3 \times \mathbb{Z}_{10}$ הוא 30.

ו. יש 4 תת-חבורות מסדר 3 (בהכרח ציקליות) והן $\langle\langle(1, 2, 3), \text{id}\rangle\rangle$, $\langle\langle \text{id}, (1, 2, 3) \rangle\rangle$, $\langle\langle(1, 2, 3), (1, 3, 2)\rangle\rangle$ ו- $\langle\langle(1, 2, 3), (1, 2, 3)\rangle\rangle$. אפשר לשים לב שהן שונות כי הוכחנו שחיתוך של תת-חבורות מסדר ראשוני הוא טריוויאלי או שיש שיוויון. דרך אחרת: אפשר לספור כמה איברים יש מסדר 3 במכפלה הישרה ולחלק ב-2, שהוא מספר היוצרים של חבורה מסדר 3. כלומר לחשב $(3 \cdot 3 - 1)/2 = 4$. לא ייתכן שיש 12 תת-חבורות מסדר 3, כי זה גורר שיש $12 \cdot (3 - 1) = 24$ איברים מסדר 3, אבל יש עוד 12 איברים מסדר 6 וגם את איבר היחידה, ונסיק שיש יותר איברים מסדר החבורה $|S_3 \times S_3| = 36$.

שאלה 2. תהי G חבורה, ונסמן את אוסף הריבועים של איברים G בסימון

$$D(G) = \{g^2 \mid g \in G\}$$

א. (20 נק') הוכיחו שאם G אבלית, אז $D(G)$ היא חבורה ביחס לפעולה מ- G .

ב. (20 נק') הוכיחו שאם $G = S_5$, אז $D(G) = A_5$. רמז: כיצד נראות תמורות ב- A_5 כמכפלת מחזורים זרים? כיצד מחשבים סימן?

ג. (בונוס, 10 נק') מצאו חבורה אינסופית G כך ש- $D(G) = G$, וחבורה אינסופית H כך ש- $D(H) = \{e_H\}$.

פתרון.

א. מספיק לבדוק כי $D(G) \leq G$. לפי הגדרה $D(G) \subseteq G$, כי $g^2 \in G$ לכל $g \in G$ לפי סגירות לפעולה. בנוסף $D(G) \neq \emptyset$, כי $\text{id} = \text{id}^2 \in D(G)$. אם $a, b \in D(G)$, אזי הם ריבועים $a = \alpha^2$ ו- $b = \beta^2$ של איברים כלשהם $\alpha, \beta \in G$. סגירות להופכי ב- $D(G)$ תתקיים כי

$$a^{-1} = (\alpha^2)^{-1} = (\alpha^{-1})^2 \in D(G)$$

שהרי $\alpha^{-1} \in G$. באופן דומה, מפני ש- $\alpha\beta \in G$, נקבל כי

$$ab = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 \in D(G)$$

כאשר בשיוויון המסומן $*$ השתמשנו באבליות של G . בסך הכל $D(G) \leq G$, ולכן $D(G)$ חבורה.

ב. נוכיח באמצעות הכלה דו-כיוונית. כל $\sigma \in D(S_5)$ היא ריבוע $\sigma = \tau^2$ של איזושהי תמורה $\tau \in S_5$. הסימן של תמורה הוא כפלי, ולכן

$$\text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\tau^2) = \text{sign}(\tau)^2 = 1$$

ולכן $\sigma \in A_5$. כלומר $D(S_5) \subseteq A_5$. $\sigma \in A_5$ תהי $\sigma \in A_5$. ראינו כיצד נראית תמורה ב- S_5 כאשר מציגים אותה כמכפלת מחזורים זרים. מבין שבע האפשרויות למבנה המחזורים ב- S_5 , בדיק ארבע מהן מתאימות לתמורה זוגית. נראה שכל אפשרות כזו היא ריבוע של תמורה ב- S_5 . הראשונה היא $\text{id} = \text{id}^2$, ולכן $\text{id} \in D(S_5)$. השנייה היא מחזורים $(i_1 i_2 i_3)$ מאורך 3. כבר ראינו בכמה הזדמנויות כי

$$(i_1 i_2 i_3) = (i_1 i_3 i_2)^2 \in D(S_5)$$

אפשרות נוספת היא של מחזור מאורך 5, וחישוב דומה יראה כי

$$(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5) = (i_1 i_4 i_2 i_5 i_3)^2 \in D(S_5)$$

האפשרות האחרונה היא מכפלה של שני חילופים זרים, ועבורה צריך לבדוק כי

$$(i j)(k l) = (i k j l)^2 \in D(S_5)$$

ובסך הכל $D(S_5) \subseteq A_5$, כפי שרצינו.

ג. אפשר לבחור את $G = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_3$ עם חיבור רכיב-רכיב, את \mathbb{Q} או את \mathbb{R} עם חיבור, את \mathbb{R}^+ או את Ω_{∞} עם כפל, ועוד הרבה אחרות (המינוח לחבורה G כזו הוא חבורה 2-חליקה אינסופית). למשל עבור כל $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ מתקיים $\frac{a}{b} = 2 \cdot \frac{a}{2b} \in D(\mathbb{Q})$, ולכן יש שיוויון $D(G) = G$.

עבור H יש לבחור חבורה אינסופית ממעריך 2 כמו $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ או $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$. הסיבה היא שחייבים שלכל $x \in H$ יתקיים $x^2 = e_H$. זה גורר ש- H אבלית, ואפילו מרחב וקטורי מעל \mathbb{Z}_2 .