

מבנים דיסקרטיים – תרגיל 3
להגשה בתאריך 9.4.2013

1. G חבורה. הוכח כי עבור $a, b \in G$ מתקיים $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. ואם G חבורה קומוטטיבית

$$\forall a, b \in G \quad (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \quad \text{אז}$$

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e \quad \text{תשובה: מתקיים}$$

$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = e \quad \text{בצורה דומה מראים}$$

$$\text{בחבורה קומוטטיבית יתקיים: } (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$

2. G חבורה קומוטטיבית, $g, h \in G : g^2 = h^3 = e_G \wedge g, h^2 \neq e_G$ (כלומר 2 סדר של g ו 3 סדר של h)

מהו הסדר של gh ?

$$\text{מתקיים } (gh)^6 = g^6h^6 = (g^2)^3(h^3)^2 = ee = e$$

$$\text{לכן } o(gh) \mid 6 \text{ כלומר } o(gh) \in \{1, 2, 3, 6\}$$

אם $o(gh) = 1$ אזי $gh = e$ כלומר $g = h^{-1}$, אבל איבר וההפכי שלו הם מאותו סדר (מדוע?), סתירה.

$$\text{אם } o(gh) = 2 \text{ אזי } e = (gh)^2 = g^2h^2 = eh^2 = h^2 \text{ בסתירה לכך ש } o(h) = 3$$

$$\text{בצורה דומה סותרים את } o(gh) = 3$$

$$\text{נשארנו רק עם המקרה } o(gh) = 6$$

פתרון חלופי:

טענה: הסדר = 6.

הוכחה:

הסדר איננו 1: כי אז $gh = e \Rightarrow g^{-1} = h$ אבל $g^2 = e \Rightarrow g^{-1} = g$ לכן $g = h$ בסתירה לכך שסדרם שונה.

הסדר איננו 2: כי אז $e = ghgh = gghh = eh = hh$ בסתירה לכך שסדר h הוא 3.

הסדר איננו 3: כי אז $e = ghghghgh = gghghh = ggg = eg = g$ בסתירה לכך שסדר g הוא 2.

הסדר איננו 4: כי אז $e = ghghghgh = gggghhhh = eeh = h$ בסתירה לכך שסדר h הוא 3.

הסדר איננו 5: כי אז $e = ghghghghgh = gggghhhhhh = eegeh = gh$ חזרה לסתירה הראשונה.

הסדר הוא 6: כי $e = ghghghghghgh = gggggghhhhhh = (eee)(ee) = e$ ושום חזקה נמוכה יותר לא תיתן זאת.

3. מצאו ב S_3 איברים g, h כבשאלה 2. מהו סדר gh ? האם זה מהווה סתירה ל 2?

תשובה:

$$\pi = (12), \sigma = (123) \in S_3 \text{ אזי } \pi\sigma = (12)(123) = (23)$$

S_3 אינה חבורה קומוטטיבית.

4. נביט בקבוצה $(\mathbb{N} \cup \{0\}) \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$ ונגדיר פעולה $*$ על הקבוצה המקיימת

$$(a,b) * (c,d) = \begin{cases} (a+c-b, d) & c > b \\ (a, b-c+d) & \text{otherwise} \end{cases}$$

a. הראו כי הקבוצה יחד עם הפעולה הנ"ל מהווה מונויד.

b. מהי קבוצת האיברים ההפיכים משמאל? האם היא חבורה?

תשובה: [אני מדלג על הסגירות ועל האסוציאטיביות]

איבר היחידה הינו $(0,0)$.

קבוצת האיברים ההפיכים משמאל היא $\{(a,0) : a \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. היא איננה חבורה משום שהיא כוללת איברים שאינם הפיכים מימין (למען האמת כל איבר פרט ל $(0,0)$ הוא אינו הפיך מימין). דרך נוספת להראות שהיא איננה חבורה היא לומר שההופכיים משמאל של האיברים שלה אינם נמצאים בקבוצה.

5. נסמן ב U_n את תת-הקבוצה של איברים ב \mathbb{Z}_n כך שאין להם מחלק משותף עם n .

לדוגמא $U_6 = \{1,5\}$. נתייחס ל U_n כקבוצה עם פעולת כפל, לדוגמא

$5 \cdot 5 = 25 = 1 \pmod{6}$ ב U_6 . מצאו את U_6, U_7, U_8 ובנו להם טבלאות כפל.

תשובה: $U_6 = \{1,5\}$ $U_7 = \{1,2,3,4,5,6\}$ $U_8 = \{1,3,5,7\}$

[אני מדלג על טבלאות הכפל, אבל אתם יכולים לבדוק ש U_6 בעלת טבלת כפל כמו \mathbb{Z}_2 , ל U_7 יש טבלת כפל כמו \mathbb{Z}_6 , ול U_8 יש טבלת כפל כמו $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, השוואת טבלאות הכפל מוכיחה איזומורפיזמים עבור הזוגות הנ"ל].

6. תהי G חבורה בה מתקיים $(ab)^2 = a^2b^2$ $\forall a,b \in G$. הראו ש G חבורה אבלית.

תשובה:

$$aabb = a^2b^2 = (ab)^2 = abab$$

נצמצם ב מימין ו a משמאל ונקבל את הדרוש.

7. תהי G חבורה (לאו דווקא אבלית) ויהיו $g, h \in G$ שני איברים שונים מסדר 2. הראו

שבהכרח קיים לפחות איבר נוסף בחבורה מסדר 2 (השונה מ g, h).

תשובה:

יהיו $g, h \in G$ שני איברים שונים מסדר 2. gh הוא איבר מסדר 2, כיוון ש

$(gh)^2 = g^2h^2 = e$, ולא ייתכן $gh = e$ כי ההפכי של עצמו, ושני האיברים שונים.

בנוסף $gh = h \Rightarrow g = e$ ולכן $gh \neq h$ ובצורה דומה $gh \neq g$.