מבנים דיסקרטיים – תרגיל 3
להגשה בתאריך 9.4.2013

1. G חבורה. הוכח כי עבור $a,b\in G$ מתקיים $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$. ואם G חבורה קומוטטיבית אז $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1} \quad \forall a,b\in G$

תשובה: מתקיים $(ab)(b^{-1}a^{-1})=a(bb^{-1})a^{-1}=aea^{-1}=aa^{-1}=e$

בצורה דומה מראים $(b^{-1}a^{-1})(ab)=e$.

בחבורה קומוטטיבית יתקיים: $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}=a^{-1}b^{-1}$.

2. G חבורה קומוטטיבית, $g,h\in G: g^2=h^3=e_G \wedge g,h^2\neq e_G$ (כלומר 2 סדר של g ו 3 סדר של h). מהו הסדר של gh ?

מתקיים $(gh)^6=g^6h^6=\left(g^2\right)^3\left(h^3\right)^2=ee=e$.

לכן $o(gh)\,|\,6$. כלומר $o(gh)\in\{1,2,3,6\}$.

אם $o(gh)=1$ אזי $gh=e$ כלומר $g=h^{-1}$, אבל איבר וההפכי שלו הם מאותו סדר (מדוע?), סתירה.

אם $o(gh)=2$ אזי $e=(gh)^2=g^2h^2=eh^2=h^2$ בסתירה לכך ש $o(h)=3$.

בצורה דומה סותרים את $o(gh)=3$.

נשארנו רק עם המקרה $o(gh)=6$.

פתרון חלופי:
טענה: הסדר=6.
הוכחה:
הסדר איננו 1: כי אז $gh=e\Rightarrow g^{-1}=h$ אבל $g^2=e\Rightarrow g^{-1}=g$ לכן g=h בסתירה לכך שסדרם שונה.
הסדר איננו 2: כי אז $e=ghgh=gghh=ehh=hh$ בסתירה לכך שסדר h הוא 3.
הסדר איננו 3: כי אז $e=ghghghgh=ggghhh=ggg=eg=g$ בסתירה לכך שסדר g הוא 2.
הסדר איננו 4: כי אז $e=ghghghgh=gggghhhh=eeeh=h$ בסתירה לכך שסדר h הוא 3.
הסדר איננו 5: כי אז $e=ghghghghgh=ggggghhhhh=eegeh=gh$ חזרה לסתירה הראשונה.
הסדר הוא 6: כי $ghghghghghgh=gggggghhhhhh=(eee)(ee)=e$ ושום חזקה נמוכה יותר לא תיתן זאת.

3. מצאו בS_3 איברים g,h כבשאלה 2. מהו סדר gh? האם זה מהווה סתירה ל 2?

תשובה:
$\pi=(12),\ \sigma=(123)\in S_3$. אזי $\pi\sigma=(12)(123)=(23)$, וזוהי תמורה מסדר 2.
S_3 אינה חבורה קומוטטיבית.

4. נביט בקבוצה $(\mathbb{N}\cup\{0\})\times(\mathbb{N}\cup\{0\})$ ונגדיר פעולה * על הקבוצה המקיימת

$$(a,b)*(c,d)=\begin{cases}(a+c-b,d) & c>b\\(a,b-c+d) & otherwise\end{cases}.$$

a. הראו כי הקבוצה יחד עם הפעולה הנ"ל מהווה מונויד.

b. מהי קבוצת האיברים ההפיכים משמאל? האם היא חבורה?

תשובה: [אני מדלג על הסגירות ועל האסוציאטיביות]

איבר היחידה הינו $(0,0)$.

קבוצת האיברים ההפיכים משמאל היא $\{(a,0):a\in N\cup\{0\}\}$. היא איננה חבורה משום שהיא כוללת איברים שאינם הפיכים מימין (למען האמת כל איבר פרט ל$(0,0)$ הוא אינו הפיך מימין). דרך נוספת להראות שהיא איננה חבורה היא לומר שההופכיים משמאל של האיברים שלה אינם נמצאים בקבוצה.

5. נסמן ב U_n את תת-הקבוצה של איברים ב $\mathbb{Z}_n$ כך שאין להם מחלק משותף עם n.
לדוגמא $U_6=\{1,5\}$. נתייחס ל U_n כקבוצה עם פעולת כפל, לדוגמה
$5\cdot 5=25=1 \pmod 6$ ב U_6. מצאו את U_6,U_7,U_8 ובנו להם טבלאות כפל.
תשובה: $U_6=\{1,5\}$ $\quad U_7=\{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad U_8=\{1,3,5,7\}$

[אני מדלג על טבלאות הכפל, אבל אתם יכולים לבדוק ש U_6 בעלת טבלת כפל כמו $\mathbb{Z}_2$, ל U_7 יש טבלת כפל כמו $\mathbb{Z}_6$, ול U_8 יש טבלת כפל כמו $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, השוואת טבלאות הכפל מוכיחה איזומורפיזמים עבור הזוגות הנ"ל].

6. תהי G חבורה בה מתקיים $\forall a,b\in G,\ (ab)^2=a^2b^2$. הראו ש G חבורה אבלית.
תשובה:

$$aabb=a^2b^2=(ab)^2=abab.$$

נצמצם b מימין ו a משמאל ונקבל את הדרוש.

7. תהי G חבורה (לאו דווקא אבלית) ויהיו $g,h\in G$ שני איברים שונים מסדר 2. הראו שבהכרח קיים לפחות איבר נוסף בחבורה מסדר 2 (השונה מ g,h).
תשובה:
יהיו $g,h\in G$ שני איברים שונים מסדר 2.
נפריד לשני מקרים. אם g,h מתחלפים, אז
gh הוא איבר מסדר 2, כיוון ש $(gh)^2=ghgh=gghh=g^2h^2=e$, ולא ייתכן $gh=e$ כי g ההפכי של עצמו, ושני האיברים שונים.
בנוסף $gh=h\Rightarrow g=e$ ולכן $gh\neq h$ ובצורה דומה $gh\neq g$.

כעת אם g,h אינם מתחלפים, נראה ש ghg הוא מסדר 2:

$(ghg)^2 = (ghg)(ghg) = gh(gg)hg = ghhg = gg = e$.

בנוסף $ghg \neq e$ כי אחרת $ghg = e \Rightarrow h = gghgg = gg = e$, סתירה לכך ש $o(h) = 2$.

לכן בהכרח $o(ghg) = 2$.

בנוסף $ghg \neq g$, כי אחרת נקבל $hg = e$ ולפי יחידות הפכי נקבל $h = g$.

מתקיים גם $ghg \neq h$, כי אחרת $gh = hg$, בסתירה להנחה שהם אינם מתחלפים.