שיעורי בית 5

1 בדצמבר 2015

1. הוכח/הפרך כי H היא ת"ח של G במקרים הבאים

(א) $H=\{a+ai \mid a\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{C}=G$

פתרון : ת"ח כי $a+ai,b+bi\in H$ אזי $(a+ai)-(b+bi)=a-b+(a-b)i\in H$

(ב) $H=m\mathbb{Z}_n=\{mz \mid z\in\mathbb{Z}_n\}\subseteq\mathbb{Z}_n=G$

פתרון : ת"ח כי $mz_1,mz_2\in H$ אזי $mz_1-mz_2=m(z_1-z_2)\in H$

(ג) $H=\{A\in\mathbb{F}^{n\times n} \mid |A|\neq 0\}\subseteq\mathbb{F}^{n\times n}=G$

פתרון : לא ת"ח כי $I,-I\in H$ אבל $I-I=0\notin H$

(ד) תהא G חבורה ו $n\in\mathbb{N}$. $H=\{g^n| \, g\in G\}$

פתרון : לא. למשל $G=S_3$. ו $n=3$ אזי $H=\{id,(1,2),(2,3),(13)\}$ אינה ת"ח כי אין סגירות.

(ה) תהא G חבורה חילופית ו $n\in\mathbb{Z}$. $H=\{g^n| \, g\in G\}$

פתרון : ת"ח כי $g_1^n,g_2^n\in H$ אזי $g_1^n\left(g_2^n\right)^{-1}=g_1^n\left(g_2^{-1}\right)^n=\left(g_1g_2^{-1}\right)^n\in H$ כאשר המעבר האחרון נכון בגלל ש H חילופית. בנוסף $e^n=e\in H$

(ו) $H=\{x^2|x\in\mathbb{Z}_4\}\subseteq\mathbb{Z}_4$

פתרון : נחשב מפורש

$$H=\{0,1\}$$

אינה תת חבורה כי $1+1=2\notin H$

(ז) $H=\{x^3|x\in\mathbb{Z}_5\}\subseteq\mathbb{Z}_5$

פתרון : נחשב מפורש

$$H=\{0,1,3,2,4\}$$

כלומר H שווה לכל $\mathbb{Z}_5$ ולכן תת חבורה.

(ח) $H=\left\{ \frac{a}{b}\,|\,a\in\mathbb{Z},\,b\in\mathbb{N},\,\frac{b}{4}\in\mathbb{N}\right\} \subseteq\mathbb{Q}$

פתרון : זוהי תת חבורה כי H אינה ריקה. בנוסף:

$$\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}=\frac{b'a-ba'}{bb'}$$

עבור $\frac{a}{b},\frac{a'}{b'}\in H$ נקבל ש 4 מחלק את b,b' ובפרט את bb' ולכן גם

$$\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}=\frac{b'a-ba'}{bb'}\in H$$

2. תהא G עם $n>2$ איברים. הוכח כי לא קיימת $H\leq G$ עם $n-1$ איברים.

פתרון : נניח בשלילה כי קיימת $H\leq G$ עם $n-1$ איברים. אזי קיים איבר יחיד $g\in G\backslash H$.

כיוון שב H יש לפחות 2 איברים אזי קיים $e\neq h\in H$. בנוסף $gh\in H$ כי $gh\neq g$. אבל Hת"ח ולכן קיים $h^{-1}\in H$ וגם מתקיים סגירות $g=(gh)\,h^{-1}\in H$. סתירה

3. תהא G חבורה $H_1,H_2\leq G$ הוכח כי

$$[H_1\subseteq H_2\vee H_2\subseteq H_1]\iff[H_1\cup H_2\leq G]$$

פתרון : הכיוון $(\Rightarrow)$ טריוואלי. נוכיח את הכיוון $(\Leftarrow)$: נניח בשלילה כי $[H_1\cup H_2\leq G]$ אבל $H_1\nsubseteq H_2\wedge H_2\nsubseteq H_1$

אזי קיימים $h_2\in H_2\backslash H_1,\,h_1\in H_1\backslash H_2$. כיוון ש $h_1,h_2\in H_1\cup H_2$ אזי גם $h_1+h_2\in H_1\cup H_2$ כי מניחים כי זוהי ת"ח.

כעת מהגדרת איחוד נובע כי $h_1+h_2\in H_1$ או $h_1+h_2\in H_2$. בה"כ $h_1+h_2\in H_1$. כיוון ש $h_1\in H_1$ אזי גם $-h_1\in H_1$ ואז $h_2=(h_1+h_2)+(-h_1)\in H_1$ כי H_1 חבורה . סתירה לכך ש $h_2\notin H_1$.