פתרון תרגיל בית 10 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1. תהינה $G_1, \ldots, G_n$ חבורות ותהינה $H_1, \ldots, H_n$ תת־חבורות נורמליות שלהן בהתאמה (כלומר $H_i \lhd G_i$ לכל i).

א. הוכיחו כי $H_1 \times \cdots \times H_n \lhd G_1 \times \cdots \times G_n$.

ב. הוכיחו כי $(G_1 \times \cdots \times G_n) \,/\, (H_1 \times \cdots \times H_n) \cong {}^{G_1}/_{H_1} \times \cdots \times {}^{G_n}/_{H_n}$.

ג. רשות: תהינה G, H חבורות. הוכיחו כי $\operatorname{Inn}(G \times H) \cong \operatorname{Inn}(G) \times \operatorname{Inn}(H)$.

פתרון.

א. קל לראות כי $H_1 \times \cdots \times H_n$ היא תת־חבורה של $G_1 \times \cdots \times G_n$. כדי להראות שהיא נורמליות, נבדוק שהיא סגורה להצמדה באיבר של $G_1 \times \cdots \times G_n$. יהיו

$$(g_1, \ldots, g_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n, \qquad (h_1, \ldots, h_n) \in H_1 \times \cdots \times H_n$$

אז נחשב

$$\begin{aligned}(g_1, \ldots, g_n)(h_1, \ldots, h_n)(g_1, \ldots, g_n)^{-1} &= (g_1h_1, \ldots, g_nh_n)\left(g_1^{-1}, \ldots, g_n^{-1}\right)\\ &= \left(g_1h_1g_1^{-1}, \ldots, g_nh_ng_n^{-1}\right)\end{aligned}$$

לכל $1 \leq i \leq n$, תת־החבורה H_i נורמלית ולכן $g_ih_ig_i^{-1} \in H_i$. קיבלנו כי $\left(g_1h_1g_1^{-1}, \ldots, g_nh_ng_n^{-1}\right) \in H_1 \times \cdots \times H_n$, כדרוש.

ב. נעזר במשפט האיזומורפיזם הראשון (הבינו למה כך פותרים את שני הסעיפים הראשונים בבת אחת). מפני ש-$H_i \lhd G_i$, אזי ${}^{G_i}/_{H_i}$ חבורה לכל i, ולכן המכפלה הקרטזית ${}^{G_1}/_{H_1} \times \cdots \times {}^{G_n}/_{H_n}$ היא חבורה. נגדיר העתקה

$$\begin{aligned}\pi\colon G_1 \times \cdots \times G_n &\to {}^{G_1}/_{H_1} \times \cdots \times {}^{G_n}/_{H_n}\\ (g_1, \ldots, g_n) &\mapsto (g_1H_1, \ldots, g_nH_n)\end{aligned}$$

שקל לראות שהיא על, כי היא "מכפלה קרטזית" של הטלות. נבדוק שהיא הומומורפיזם:

$$\begin{aligned}\pi(g_1, \ldots, g_n)\,\pi(g_1', \ldots, g_n') &= (g_1H_1, \ldots, g_nH_n)(g_1'H_1, \ldots, g_n'H_n)\\ &= (g_1g_1'H_1, \ldots, g_ng_n'H_n) = \pi(g_1g_1', \ldots, g_ng_n')\\ &= \pi\left((g_1, \ldots, g_n)(g_1', \ldots, g_n')\right)\end{aligned}$$

אגב, לכל קבוצה של הומומורפיזמים $f_i\colon G_i \to K_i$ הפונקציה $f\colon \prod_i G_i \to \prod_i K_i$ המוגדרת כך שברכיב ה-i נקבל $g_i \mapsto f_i(g_i)$ היא הומומורפיזם. נחשב את הגרעין של π:

$$\begin{aligned}\ker\pi &= \left\{(g_1, \ldots, g_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n \,\middle|\, \pi(g_1, \ldots, g_n) = e_{G_1/H_1 \times \cdots \times G_n/H_n}\right\}\\ &= \{(g_1, \ldots, g_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n \,|\, (g_1H_1, \ldots, g_nH_n) = (H_1, \ldots, H_n)\}\\ &= \{(g_1, \ldots, g_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n \,|\, \forall i: g_i \in H_i\} = H_1 \times \cdots \times H_n\end{aligned}$$

ולפי משפט האיזומורפיזם הראשון נקבל את הדרוש.

ג. זה סעיף שמיועד למי שפגש את חבורת האוטומורפיזמים הפנימיים. ראינו בתרגול שבכל חבורה $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$. נעזר בכך בתכונה $Z(G\times H) = Z(G)\times Z(H)$ (ודאו שאתם יודעים להוכיח את זה!) ולכן

$$\begin{aligned}\mathrm{Inn}(G\times H) &\cong (G\times H)/Z(G\times H) = (G\times H)/(Z(G)\times Z(H)) \\ &\cong (G/Z(G))\times(H/Z(H)) \cong \mathrm{Inn}(G)\times\mathrm{Inn}(H)\end{aligned}$$

כאשר האיזומורפיזם בין השורות הוא מקרה פרטי של הסעיף הקודם.

שאלה 2. תהי G חבורה ותהינה H,K תת־חבורות נורמליות המקיימות $H\cap K = \{e\}$. הוכיחו כי G איזומורפית לתת־חבורה של $G/K \times G/H$.

פתרון. נתבונן בהעתקה: $f\colon G \to G/K \times G/H$ המוגדרת לפי

$$f(g) = (gH, gK)$$

ונראה שהיא שיכון. תחילה יש להוכיח שזהו הומומורפיזם. אכן, לכל $g_1, g_2 \in G$ מתקיים

$$f(g_1g_2) = (g_1g_2H, g_1g_2K) = (g_1H, g_1K)(g_2H, g_2K) = f(g_1)f(g_2)$$

כשהשיוויון האמצעי נובע מהנורמליות של H,K. יהי $g\in\ker(f)$. כלומר מתקיים עבורו

$$f(g) = (gH, gK) = e_{G/K\times G/H} = (H,K)$$

ידוע לנו ש-$gH = H, gK = K$ אם ורק אם $g\in K$ וגם $g\in H$. כלומר

$$g\in H\cap K = \{e\}$$

אם כן, הגרעין של f הוא טריוויאלי וזו ההגדרה של שיכון. לכן $G\cong \mathrm{im}\, f \le G/K \times G/H$.

שאלה 3 (משפט האיזומורפיזם השלישי). תהי G חבורה, תהינה $H,K \lhd G$ תת־חבורות נורמליות, ונניח $H\subseteq K\subseteq G$, אז

$$(G/H)/(K/H) \cong G/K$$

הוכיחו את המשפט בעזרת משפט האיזומורפיזם הראשון לפי ההדרכה. כחימום, קודם כל ודאו שאתם מבינים למה $H \lhd K$ ולמה טבעי להגדיר הומומורפיזם $f\colon G/H \to G/K$ לפי $f(gH) = gK$.

א. הוכיחו ש-f מוגדר היטב. כלומר, שאם $g_1H = g_2H$, אז $f(g_1H) = f(g_2H)$.

ב. הוכיחו ש-f הומומורפיזם.

ג. הוכיחו ש-f על.

ד. הוכיחו כי $\ker f = K/H$.

ה. הסיקו את הדרוש לפי משפט האיזומורפיזם הראשון.

פתרון.

א. נניח כי $g_1H = g_2H$ עבור $g_1, g_2\in G$. לכן $g_1g_2^{-1}\in H$. מהנתון $H\subseteq K$, אז גם $g_1g_2^{-1}\in K$, ולכן $g_1K = g_2K$. כלומר $f(g_1H) = f(g_2H)$, כדרוש.

ב. יהיו $g_1H, g_2H \in {}^{G}\!/_{H}$. אזי

$$f((g_1H)(g_2H)) = f(g_1g_2H) = g_1g_2K = (g_1K)(g_2K) = f(g_1H)f(g_2H)$$

כאשר השתמשנו בפעולות של חבורות המנה (הרי $H, K \lhd G$).

ג. יהי $gK \in {}^{G}\!/_{K}$. לכן $f(gH) = gK$, ומכאן ש-f על.

ד. נחשב את $\ker f$:

$$\begin{aligned}\ker f &= \left\{gH \in {}^{G}\!/_{H} \,\middle|\, f(gH) = e_{G/K}\right\} = \left\{gH \in {}^{G}\!/_{H} \mid gK = K\right\} \\ &= \left\{gH \in {}^{G}\!/_{H} \mid g \in K\right\} = {}^{K}\!/_{H}\end{aligned}$$

ה. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון $(G/H) / \ker f \cong \operatorname{im} f$ ולכן $(G/H) / (K/H) \cong G/K$.

שאלה 4. נסתכל על החבורה S_4. נגדיר תת־קבוצה שלה

$$V = \{\mathrm{id}, (1\ 2)\,(3\ 4)\,, (1\ 3)\,(2\ 4)\,, (1\ 4)\,(2\ 3)\}$$

שנקראת חבורת הארבעה של קליין.

א. הוכיחו כי $V \lhd S_4$.

ב. מצאו סדרה של תת־חבורות

$$\{\mathrm{id}\} = G_n \lhd G_{n-1} \lhd \cdots \lhd G_1 \lhd G_0 = S_4$$

כך שלכל i מתקיים $G_{i+1} \lhd G_i$, וגם לכל i המנה ${}^{G_i}\!/_{G_{i+1}}$ היא חבורה ציקלית. רמז: העזרו בסעיף הקודם ובתת־חבורה נורמלית מוכרת אחרת של S_4.

פתרון.

א. קודם, צריך להוכיח ש-$V \leq S_4$. נוכיח לפי הקריטריון המקוצר. לפי הגדרה $\mathrm{id} \in V$ ולכן $V \neq \varnothing$. כעת, תהינה $\sigma, \tau \in V$. לכן $\sigma^{-1} = \sigma$ ו-$\tau^{-1} = \tau$ כי הם מסדר 2. רוצים להוכיח כי $\sigma\tau^{-1} \in V$, ולכן שקול להוכיח $\sigma\tau \in V$. אם σ או τ הן id, זה ברור. גם אם $\sigma = \tau$, אז $\sigma\tau = \sigma^2 = \mathrm{id}$. לכן נניח ש-$\sigma, \tau \neq \mathrm{id}$ ו-$\sigma \neq \tau$, ונבדוק את כל האפשרויות:

$$\begin{aligned}(1\ 2)\,(3\ 4)\,(1\ 3)\,(2\ 4) &= (1\ 4)\,(2\ 3) \in V\\ (1\ 3)\,(2\ 4)\,(1\ 2)\,(3\ 4) &= (1\ 4)\,(2\ 3) \in V\\ (1\ 2)\,(3\ 4)\,(1\ 4)\,(2\ 3) &= (1\ 3)\,(2\ 4) \in V\\ (1\ 4)\,(2\ 3)\,(1\ 2)\,(3\ 4) &= (1\ 3)\,(2\ 4) \in V\\ (1\ 3)\,(2\ 4)\,(1\ 4)\,(2\ 3) &= (1\ 2)\,(3\ 4) \in V\\ (1\ 4)\,(2\ 3)\,(1\ 3)\,(2\ 4) &= (1\ 2)\,(3\ 4) \in V\end{aligned}$$

כלומר מכפלת כל שני איברים לא טריוויאלים שונים היא האיבר הלא טריוויאלי השלישי. לכן $\sigma\tau^{-1} = \sigma\tau \in V$.
כעת נראה $V \lhd S_4$. תהיינה $\sigma \in S_4$, $\pi \in V$. צ"ל $\sigma\pi\sigma^{-1} \in V$. אם $\pi = \mathrm{id}$ זה ברור, אחרת $\sigma\pi\sigma^{-1}$ היא תמורה ממבנה מחזורים $(i\ j)\,(k\ l)$, ולכן היא ב-V, כדרוש.

ב. נזכר כי $A_4 \lhd S_4$ (כי היא תת־חבורה מאינדקס 2), וכעת הוכחנו $V \lhd S_4$. בנוסף $V \lhd A_4$, וקיבלנו שרשרת

$$\{\mathrm{id}\} \lhd V \lhd A_4 \lhd S_4$$

נחשב כל מנה: $A_4 \lhd S_4$ מאינדקס 2, ולכן $S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$ ציקלית.
$V \lhd A_4$ והאינדקס הוא $[A_4 : V] = \frac{|A_4|}{|V|} = \frac{12}{4} = 3$, כלומר A_4/V היא חבורה מסדר 3, כלומר היא ציקלית ואיזומורפית ל-$\mathbb{Z}_3$.
אבל $V/\{\mathrm{id}\} \cong V$ היא אבלית שאינה ציקלית (כי אין שם איבר מסדר 4 – האיברים הלא טריוויאלים הם מסדר 2). אז חסרה עוד תת־חבורה נורמלית. נעדן את השרשרת ונוסיף את

$$\{\mathrm{id}\} \lhd \langle (1\ 2)\,(3\ 4) \rangle \lhd V \lhd A_4 \lhd S_4$$

תת־החבורה $H = \langle (1\ 2)\,(3\ 4) \rangle$ היא מסדר 2, כי $|H| = o\left((1\ 2)\,(3\ 4)\right) = 2$. מכאן $[V : H] = 2$, כלומר $H \lhd V$, וכן $V/H \cong \mathbb{Z}_2$ ציקלית. כמו כן, $H/\{\mathrm{id}\} \cong H \cong \mathbb{Z}_2$ גם היא ציקלית. לכן השרשרת האחרונה שקיבלנו מתאימה לתנאי השאלה.
סוג כזה של סדרה נקרא סדרת הרכב, ואם המנות G_i/G_{i+1} בסדרה הן ציקליות, אז החבורה נקראת פתירה. זו תכונה מאוד שימושית של חבורה, לא רק במסגרת הקורס.

שאלה 5. נראה שאיזומורפיות בתת־חבורות נורמליות ובחבורות המנה ביחד עדין לא גורר איזומורפיות בחבורה "למעלה".

א. תנו דוגמה לחבורה אבלית G_1 ולחבורה לא אבלית G_2, שיש להן תת־חבורות נורמליות $H_1 \lhd G_1$ ו-$H_2 \lhd G_2$, כך שמתקיים $H_1 \cong H_2$ וגם $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$. רמז: אפשר למצוא דוגמאות כאלו כבר לחבורות מסדר 6 או 8.

ב. כמו בסעיף הקודם, אבל הפעם נדרוש ששתי החבורות G_1, G_2 הן אבליות ולא איזומורפיות. רמז: אפשר לבחור חבורות מסדר p^2 עבור p ראשוני.

פתרון.

א. כמו ברמז נבחר $G_1 = \mathbb{Z}_6$ ו-$G_2 = S_3$. ראינו שלשתיהן יש תת־חבורות מסדר 3, $H_1 = \langle 2 \rangle = \{0, 2, 4\}$ ו-$H_2 = A_3$. תת־החבורות H_i הן מאינדקס 2, ולכן נורמליות ב-G_i לכל i. כל חבורה מסדר 3 איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_3$ וחבורות המנה G_i/H_i הן מסדר $\frac{6}{3} = 2$, ולכן איזומורפיות ל-$\mathbb{Z}_2$. לכן $H_1 \cong \mathbb{Z}_3 \cong H_2$ וגם $G_1/H_1 \cong \mathbb{Z}_2 \cong G_2/H_2$.
בחירה אחרת הן החבורות $G_1 = \mathbb{Z}_8$ ו-$G_2 = Q_8$ ששתיהן מסדר 8.

ב. נבחר את $G_1 = \mathbb{Z}_9$ ואת $G_2 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ שהן לא איזומורפיות (הראשונה ציקלית והשנייה לא). לשתיהן תת־חבורות מסדר 3 (למשל $\langle 3 \rangle \le G_1$ ו-$\langle (1,0) \rangle \le G_2$), וחבורות המנה לגביהן תהינה מסדר 3. נקבל שוב ש-$H_1 \cong \mathbb{Z}_3 \cong H_2$, והפעם גם חבורות המנה איזומורפיות שתיהן ל-$\mathbb{Z}_3$.

שאלה 6. תהי G חבורה שבה לכל $x, y \in G$ מתקיים $(xy)^{2019} = x^{2019}y^{2019}$. נסמן שלוש תת־קבוצות

$$\begin{aligned} A &= \left\{ g^{2019} \,\middle|\, g \in G \right\} \\ B &= \left\{ g^{2018} \,\middle|\, g \in G \right\} \\ C &= \left\{ g \,\middle|\, g \in G, g^{2019} = e \right\} \end{aligned}$$

א. הוכיחו $A, B, C \lhd G$. צריך להוכיח שהן תת־חבורות, וגם שהן נורמליות. רמז: כדאי לא לעבוד קשה ולהעזר בהומומורפיזמים.

ב. הוכיחו שכל איברי A מתחלפים עם כל איברי B. באופן שקול, הוכיחו שלכל $x, y \in G$ מתקיים $x^{2019}y^{2018} = y^{2018}x^{2019}$.

ג. הוכיחו שלכל $g, h \in G$ מתקיים $\left(ghg^{-1}h^{-1}\right)^{2019\cdot 2018} = e$.

פתרון.

א. בפתרון נאיבי ננסה להוכיח "לפי הגדרה" שתת־הקבוצות שבשאלה הן תת־חבורות. כלומר שהן לא ריקות, סגורות לפעולה וסגורות לפעולה. את הנורמליות נוכיח לפי זה שהן נשמרות תחת הצמדה באיברי G.
ישנה דרך נוספת, שהיא יותר קצרה: נשים לב שההעתקה $f\colon G \to G$ המוגדרת לפי $f(g) = g^{2019}$ היא הומומורפיזם לפי הנתון בשאלה. נחשב שהגרעין של f הוא בדיוק $\ker f = C$, ולכן C היא תת־חבורה נורמלית. זהו, לא צריך יותר כלום עבור C.
נחשב גם שהתמונה של f היא $\operatorname{im} f = A$, ולכן $A \le G$. את הנורמליות של A נוכיח לפי הצמדה. יהי $x \in G$ ויהי $a \in A$, כך ש-$a = g^{2019}$. נרצה להראות $xax^{-1} \in A$. נראה שמדובר באיבר של G בחזקת 2019 לפי

$$xax^{-1} = xg^{2019}x^{-1} = xgx^{-1}xgx^{-1}\dots xgx^{-1} = \left(xgx^{-1}\right)^{2019}$$

כלומר $xax^{-1} \in A$, ולכן $A \lhd G$.
עבור B נצטרך להתאמץ קצת יותר. נגדיר העתקה $\phi\colon G \to G$ לפי $\phi(g) = g^{-2018}$. נבדוק שזהו הומומורפיזם:

$$\begin{aligned}\phi(xy) = (xy)^{-2018} = \left(y^{-1}x^{-1}\right)^{2018} &= xx^{-1}\left(y^{-1}x^{-1}\right)^{2018}y^{-1}y \\ &= x\left(x^{-1}y^{-1}\right)^{2019}y = xx^{-2019}y^{-2019}y = x^{-2018}y^{-2018} = \phi(x)\phi(y)\end{aligned}$$

והתמונה שלו היא $\operatorname{im}\phi = B^{-1} = B$, כי אם $b \in B$, אז קיים g כך ש-$b = g^{2018}$, ולכן $b^{-1} = \left(g^{-1}\right)^{2018}$ (כלומר גם $b^{-1} \in B$). לכן $B \le G$. את הנורמליות של B מוכיחים בצורה דומה להוכחת הנורמליות של A.

ב. נעזר בנתון בשאלה שלכל $x, y \in G$ מתקיים $(xy)^{2019} = x^{2019}y^{2019}$ וגם לפי הסעיף הקודם $(xy)^{2018} = y^{2018}x^{2018}$ כי

$$(xy)^{2018} = \phi((xy)^{-1}) = \phi(y^{-1}x^{-1}) = \phi(y^{-1})\phi(x^{-1}) = y^{2018}x^{2018}$$

לכן

$$x^{2019}y^{2018} = xx^{2018}y^{2018} = x\,(yx)^{2018} = y^{-1}yx\,(yx)^{2018} = y^{-1}\,(yx)^{2019} = y^{2018}x^{2019}$$

כלומר $f(x)\phi(y^{-1}) = \phi(y^{-1})f(x)$, ולכן גם $f(x)\phi(y) = \phi(y)f(x)$.

ג. נעזר בזהויות מהסעיף הקודם ונחשב

$$\begin{aligned}\left(ghg^{-1}h^{-1}\right)^{2019\cdot 2018} &= \left(\left(ghg^{-1}h^{-1}\right)^{2019}\right)^{2018} = \left((gh)^{2019}\left(g^{-1}h^{-1}\right)^{2019}\right)^{2018} \\ &= \left(g^{-1}h^{-1}\right)^{2019\cdot 2018}(gh)^{2019\cdot 2018} \\ &= \left(g^{-2019}h^{-2019}\right)^{2018}\left(g^{2019}h^{2019}\right)^{2018} \\ &= h^{-2019\cdot 2018}g^{-2019\cdot 2018}h^{2019\cdot 2018}g^{2019\cdot 2018} \\ &= \left(h^{-2018}\right)^{2019}\left(g^{-2019}\right)^{2018}h^{2019\cdot 2018}g^{2019\cdot 2018} \\ &= g^{-2019\cdot 2018}h^{-2019\cdot 2018}h^{2019\cdot 2018}g^{2019\cdot 2018} = e\end{aligned}$$

או שנוכיח בעזרת ההומורפיזמים f ו-ϕ. קל לראות שהם מתחלפים, כי לכל $x \in G$ מתקיים

$$f(\phi(x)) = \left(x^{-2018}\right)^{2019} = \left(x^{2019}\right)^{-2018} = \phi(f(x))$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\left(ghg^{-1}h^{-1}\right)^{2019\cdot 2018} &= \left(\left(hgh^{-1}g^{-1}\right)^{2019}\right)^{-2018} = \phi\left(f\left(hgh^{-1}g^{-1}\right)\right) \\
&= \phi\left(f\left(h\right)f\left(g\right)f\left(h^{-1}\right)f\left(g^{-1}\right)\right) \\
&= \phi\left(f\left(h\right)\right)\phi\left(f\left(g\right)\right)\phi\left(f\left(h^{-1}\right)\right)\phi\left(f\left(g^{-1}\right)\right) \\
&= \phi\left(f\left(h\right)\right)f\left(\phi\left(g\right)\right)\phi\left(f\left(h^{-1}\right)\right)\phi\left(f\left(g^{-1}\right)\right) \\
&= \phi\left(f\left(h\right)\right)\phi\left(f\left(h^{-1}\right)\right)f\left(\phi\left(g\right)\right)f\left(\phi\left(g^{-1}\right)\right) \\
&= \phi\left(f\left(h\right)f\left(h^{-1}\right)\right)f\left(\phi\left(g\right)\phi\left(g^{-1}\right)\right) = \phi\left(e\right)f\left(e\right) = e
\end{aligned}$$

בהצלחה!