

תרגיל 4 אינפי 3

1. האם הגבולות הבאים קיימים? אם כן מצא אותם. האם הגבולות החוזרים של פונקציות אלה קיימים? אם כן, מצא אותם

(א)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}$$

(ב)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

(ג)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + \sin(y)}{x + y}$$

2. תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית. נגדיר $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי

$$f(x, y) = x^2 + \cos^2\left(e^{\frac{x}{y}}\right)$$

הוכח כי קיים $0 < M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $(x, y) \in E$ מתקיים $M \leq f(x, y)$.
רמז: אין צורך לעשות חישובים מסובכים.

3. (א) תהי פונקציה המוגדרת על תחום D , רציפה לפי x (כלומר לכל y' הפונקציה $g(x) = f(x, y')$ רציפה) ורציפה במידה שווה לפי y (כלומר לכל x' הפונקציה $h(y) = f(x', y)$ רציפה במידה שווה). הוכח כי רציפה $f(x, y)$ ב D .

(ב) האם הפונקציה $f(x, y) = \cos \frac{1}{1-x^2-y^2}$ רציפה במידה שווה על התחומים הבאים?

i.

$$D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

ii.

$$D_2 = \{(x, y) \mid 3 < x^2 + y^2 < 4\}$$

4. תהי $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה על D , כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^n$. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

(א) תהינה

$$\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow D$$

$$\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow D$$

שתי מסילות רציפות כך ש

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(1) = a \quad \gamma_1(1) = \gamma_2(0) = b$$

אזי, קיים $t \in (0, 1)$ עבורו

$$f(\gamma_1(t)) = f(\gamma_2(t))$$

(ב) תהינה

$$\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow D$$

$$\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow D$$

שתי מסילות רציפות כך ש

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(1) = a \quad \gamma_1(1) = \gamma_2(0) = b$$

אזי, קיים $t \in [0, 1]$ עבורו

$$f(\gamma_1(t)) = f(\gamma_2(t))$$

5. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות בכל נקודה בה הן מוגדרות:

$$f(x, y) = x^3 + 3y^2 - \frac{x}{y} \quad (\text{א})$$

$$f(x, y) = e^{\cos(xy)} \quad (\text{ב})$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{ג})$$

$$f(x, y, z) = \ln(x^3 + y^3 - z^3) \quad (\text{ד})$$

6. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה. האם הן רציפות ב $(0, 0)$?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$