

אלגברה מופשטת 1, תרגיל בית 5

מתרגלים: סולי וישקאוצן ואדם צ'פמן. להגשה ב-11.12 או ב-14.12 בהתאם לשיעור התרגיל.

(1) אם G היא חבורה לא אבלית מסדר 6 אזי היא כוללת איבר a מסדר שלוש

ואיבר b מסדר שתיים ומתקיים $G = \{1, a, a^2, b, ab, a^2b\}$. הוכח כי

$$ba = a^2b$$

(2) הראו כי $\mathbb{Q}(i) \setminus \{0\}$ = החבורה הכפלית הנוצרת מהמספרים הרציונליים

והמספר המרוכב i אינה איזומורפית ל- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \setminus \{0\}$ = החבורה הכפלית

הנוצרת מהמספרים הרציונליים והשורש של 2.

(3) יהיו H, K תת-חבורות של G . הוכיחו כי HK תת-חבורה של G אם

$$\text{ורק אם } HK = KH.$$

(4) תהי G חבורת המטריצות מהצורה $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ כאשר $a, b \in \mathbb{R}$ ו- $a \neq 0$

עם פעולת הכפל של מטריצות (אין צורך להראות כי זו חבורה) ותהי H

תת החבורה של G של המטריצות מהצורה $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ כאשר $c \in \mathbb{R}$. תנו

תיאור מלא של הקבוצת המחלקות השמאליות של H ב- G .

(5) תהי $G = \{1, -1, i, j, ij, -i, -j, -ij\}$ חבורה עם פעולת כפל המוגדרת

$i^2 = j^2 = -1$ ו- $ji = -ij$. מצאו תת-חבורה H כך ש- $[G:H] = 4$. עבור

אותה תת-חבורה, מצאו את המחלקות השמאליות והמחלקות הימניות שלה.