<u>יריעות</u>

דיברנו בעבר על גופים בעלי מימד קטן ממימד של המרחב בו הם שוכנים. לדוגמא, דיברנו על הגרף של הפונקציה $f(x)=\cos(x)$, כלומר על $(x,\cos(x))$ הנמצא ב $\mathbb{R}^2$ אבל בעל מימד 2 .

כעת נרצה להגדיר זאת בצורה מתמטית. יריעה k ממדית M ב $\mathbb{R}^n$ תהיה תת קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ כך שלכל נקודה p ב M קיימת סביבה U שנראית כמו תת קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^k$.
כך למשל קל לראות כי הגרף של פונקציית הקוסינוס נראית כמו קו.

הגדרה: $M\subseteq\mathbb{R}^n$ הינה יריעה k ממדית אם לכל נקודה p ב M קיימת סביבה U_p שהיא התמונה של קבוצה פתוחה O_p ב $\{(x_1,...,x_k):x_1\le 0\}$ תחת הומאומורפיזם k_p . בנוסף,

i. אם p הינה תמונה של נקודה ב $\{(x_1,...,x_k):x_1<0\}$ אזי p הינה נקודת פנים (interior).
ii. אם p הינה תמונה של נקודה ב $\{(x_1,...,x_k):x_1=0\}$ אזי p הינה נקודת שפה (Boundary).

אם $k_p\in C^\infty$ וליעקוביאן שלה יש דרגה n בכל מקום אזי היריעה הינה חלקה. אם ל M אין נקודות שפה אז היא נקראית יריעה סגורה(לא במובן הטופולוגי).

הערה: יריעה ממימד 0 הינה אוסף של נקודונים ב $\mathbb{R}^n$.

דוגמאות :

i. האינטרוול הסגור $[a,b]$, הינו יריעה חלקה עם נקודות שפה $\{a,b\}$ אשר מהוות יריעה מסדר 0.
ii. הגרף של כל פונקציה חלקה $y=f(x)$, $a\le x\le b$, הינה יריעה חלקה עם נקודות שפה $\{(a,f(a)),(b,f(b))\}$, יריעה מסדר 0.
iii. מעגל היחידה במישור הינו יריעה חלקה ממימד 1, הפרמטריזציה המתאימה שלו הינה $(x,y)=(\cos t,\sin t)$ עבור $0\le t\le 2\pi$.
iv. כל עקום פשוט ב $\mathbb{R}^3$ הנתון ע"י $(x,y,z)=k(t)=(f(t),g(t),h(t))$ עבור $a\le t\le b$ עם $k'(t)=(f'(t),g'(t),h'(t))\neq 0$ לכל $a\le t\le b$ הינו יריעה חד מימדית . אם

$k(a)\neq k(b)$, זוהי יריעה עם שפה. אם $k^{(n)}(a)=k^{(n)}(b)$ לכל n אז זוהי יריעה סגורה.

v. הספירה ה 2 $x^2+y^2+z^2=1$ ב $\mathbb{R}^3$ הינה יריעה חלקה ללא נקודות שפה. כאן, לא נוכל להשתמש במיפוי אחד על מנת לתאר את הספירה. נשתמש ב $k_+(\varphi,\theta)=(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi)$ עם $0\leq\varphi<\pi, 0\leq\theta<2\pi$ על מנת לתאר את הקוטב הצפוני (כל הספירה מלבד הנקודה $(0,0,-1)$) . וב $k_-(\varphi,\theta)=(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,-\cos\varphi)$ על מנת לתאר את הקוטב הדרומי (כל הספירה מלבד הנקודה $(0,0,1)$). אוסף של מפות ההמתאר לנו יריעה נקרא אטלס.

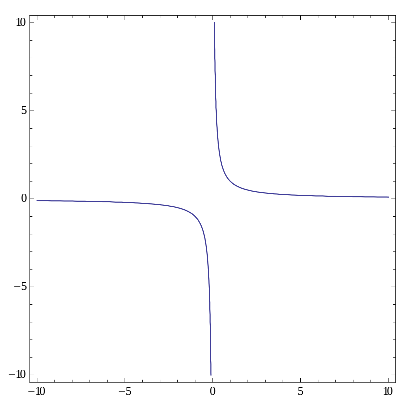
vi. הקבוצה $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $t\mapsto(t^2,t^3)$ איננה יריעה שכן $\nabla\varphi=(2t,3t)$ אשר מתאפסת ב $t=0$ ולכן איננה יריעה.

ניתן גם לתאר יריעות באופן שאיננו ישיר ע"י פרמטריזציה אלא בצורה סתומה. למשל $x^2+y^2+z^2=1$. ישנו כלל פשוט על מנת לדעת אם קבוצה המתואר בצורה סתומה אכן יריעה:

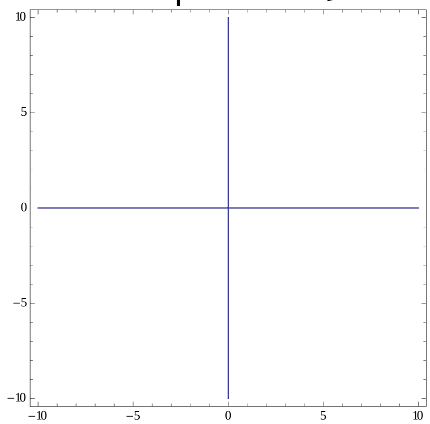
$M=\left\{(x_1,...,x_n): \begin{matrix} g_1(x_1,...,x_n)=0 \\ \vdots \\ g_k(x_1,...,x_n)=0 \end{matrix}\right\}$ הינה יריעה מסדר $n-k$ אם $rank\begin{pmatrix}\nabla g_1(x_1,...,x_n) \\ \vdots \\ \nabla g_k(x_1,...,x_n)\end{pmatrix}=k$ בכל נקודה.

דוגמאות:

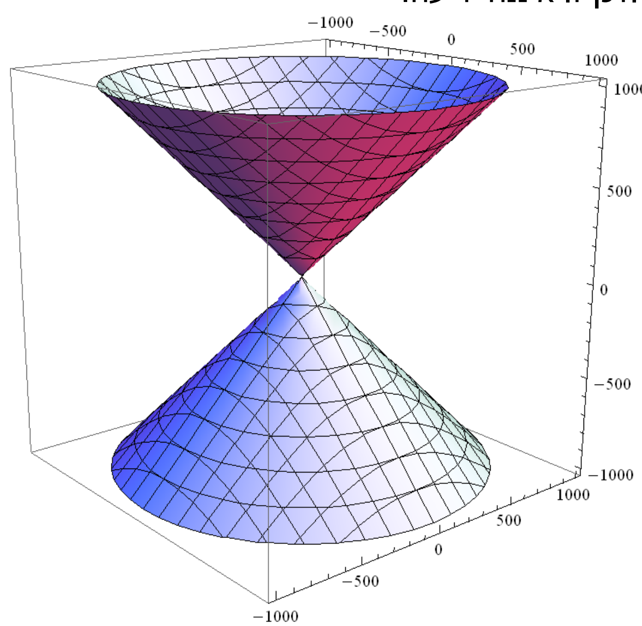
i. $M=\{(x,y):g(x,y)=xy-1=0\}$ הינה יריעה שכן $\nabla g(x,y)=(y,x)\neq 0$ כי $(0,0)\notin M$.



ii. $M=\{(x,y):g(x,y)=xy=0\}$. נחשב $\nabla g(0,0)=0$ ולכן זו איננה יריעה. ניתן לראות זאת גם ע"י זה שהקבוצה היא למעשה צלב ולכן איננה דומה לקו בסביבה של 0.



iii. $M=\{(x,y):g(x,y)=z^2-x^2-y^2=0\}$. נחשב ונקבל כי $\nabla g(x,y,z)=(-2x,-2y,2z)$. הנקודה $(0,0,0)$ שייכת לקבוצה ולכן נקבל כי הגרדיינט מתאפס ולכן זו איננה יריעה.



iv. $$M=\left\{(x,y,z):\begin{array}{c} g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0 \\ g_2(x,y,z)=x+y+z-1=0 \end{array}\right\}$$

$$\nabla g_1(x,y,z)=(2x,2y,2z)$$
$$\nabla g_2(x,y,z)=(1,1,1)$$

אבל ברור כי על מנת שהדרגה של מטריצת היעקוביאן תהיה קטנה מ 1 צריך ש $x=y=z$.

מהמשוואה השנייה נובע כי $x=y=z=-\frac{1}{3}$, אבל שלשה זו איננה פותרת את המשוואה הראשונה ולכן ה rank הינו 2 ולכן זו יריעה ממימד 1.