תרגיל בית 6 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1 (חימום). הוכיחו כי לכל $a,n,m\in\mathbb{Z}$ מתקיים $(an,am)=|a|\,(n,m)$.

שאלה 2 (חימום). תהי G חבורה מסדר n ויהי $\Phi\colon G\to S_n$ שיכון קיילי. הוכיחו שאיבר $g\in G$ הוא מסדר m אם ורק אם $\Phi(g)$ הוא מכפלה של $\frac{n}{m}$ מחזורים זרים מאורך m.

שאלה 3. נסמן כמה איברים של החבורה $GL_2(\mathbb{C})$:

$$I=\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix} 0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

ונסמן ב-Q את תת־החבורה הקטנה ביותר של $GL_2(\mathbb{C})$ שמכילה את I,J,K. היא נקראת חבורת הקווטרניונים. מצאו באופן מפורש שיכון של Q ב-S_8. כלומר חשבו והוכיחו לאן עובר כל איבר.

רמז: מצאו את איברי Q וזה שבתאריך 16 באוקטובר 1843 חרט ויליאם רואן המילטון על גשר בְּרוּם

$$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$$

שאלה 4. מצאו בעזרת אלגוריתם אוקלידס את הממ"מ הבאים:

א. $(892,140)$

ב. $(17840,-2800)$, רמז: העזרו בחימום.

שאלה 5. פתרו את בעיה 5 מפרוייקט אוילר: המספר 2520 הוא המספר הקטן ביותר שהחלוקה שלו בכל אחד מן המספרים מ-1 עד ל-10 היא ללא שארית.
מה הוא המספר החיובי הקטן ביותר שמתחלק ללא שארית בכל המספרים מ-1 עד ל-20?
מותר (ואפילו מומלץ) לתכנת כאן, ואז צריך להוסיף את התוכנה שכתבתם.

שאלה 6. הוכיחו שלכל מספר שלם n מתקיים $(5n+4,9n+7)=1$, ומצאו s,t (התלויים ב-n) כך ש-$(5n+4)s+(9n+7)t=1$.
רמז: אלגוריתם אוקלידס המורחב עובד גם עם פרמטרים.

שאלה 7. מצאו את כל המספרים השלמים n כך ש-$(n+2)|(n^2+8)$.

שאלה 8. תהינה G,H חבורות, יהיו $g\in G$, $h\in H$ איברים מסדר אי זוגי, ונסתכל על האיבר $(g^2,h^2)\in G\times H$. הוכיחו $o((g^2,h^2))=[o(g),o(h)]$.
כלומר הוכיחו שהסדר של (g^2,h^2) הוא הכפולה המשותפת המינימלית של $o(g)$ ו-$o(h)$.

שאלה 9 (רשות). תהי G חבורה ונתבונן בפונקציות $f(x)=x^3$, $g(x)=x^4$ ו-$h(x)=x^5$ מהחבורה לעצמה. הוכיחו שהפונקציות האלו הן הומומורפיזמים (כולן יחד) אם ורק אם G אבלית.

בהצלחה!