

תרגיל בית 2 במבנים אלגבריים

89-214 סמסטר א' תשע"ו

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא לתרגול בשבוע המתחיל בתאריך כ"ז חשוון ה'תשע"ו, 8.11.2015.

שאלה 1. ענו עבור כל אחת מן המערכות האלגבריות הבאות: האם היא חבורה למחצה? האם היא מונואיד? אם כן, מי הוא איבר היחידה? האם היא חבורה? האם הפעולה היא חילופית?

א. $(\mathbb{Z}, *)$, המספרים השלמים עם הפעולה $a * b = a + b + 2$.

ב. (\mathbb{N}, \max) , המספרים הטבעיים עם הפעולה של בחירת המקסימום.

ג. $(2\mathbb{Z}, \cdot)$, המספרים השלמים הזוגיים עם פעולת הכפל הרגילה.

ד. $(\mathbb{R}, *)$, המספרים הממשיים עם הפעולה $a * b = \sqrt{a+b}$.

ה. הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

ו. (A, \cdot) , הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריצות.

ז. $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$, המספרים הממשיים עם הפעולה $a \circ b = a + b + ab$. רמז: קודם הוכיחו שזו פעולה סגורה.

שאלה 2. יהי $m \in \mathbb{Z}$. הוכיחו כי $[m] \in U_n$ אם ורק אם $(n, m) = 1$. כלומר, ההפיכים במונואיד (\mathbb{Z}_n, \cdot) הם כל האיברים הזרים ל- n . רמז: מי הוא איבר היחידה ב- U_n ?

שאלה 3. הוכיחו כי בלוח כפל של חבורה סופית בכל שורה מופיעים כל איברי החבורה, וכל איבר מופיע פעם אחת.

שאלה 4. תהי קבוצה $S = \{a, b\}$. רשמו לוחות כפל עם פעולה $*$ כך שהמערכת האלגברית $(S, *)$ היא:

א. חבורה למחצה שאינה מונואיד.

ב. מונואיד שאינו חבורה.

ג. חבורה. למה בהכרח מתקבלת חבורה חילופית?

שאלה 5. נזכיר שמשפט השאריות הסיני אומר שאם n, m זרים, אזי לכל $a, b \in \mathbb{Z}$ קיים x יחיד עד כדי שקילות מודולו nm כך ש- $x \equiv a \pmod{n}$, $x \equiv b \pmod{m}$. הוכחנו כי $x = bsn + atm$ מקיים את הדרוש. הוכיחו שזה הפתרון היחיד עד כדי שקילות מודולו nm .

רשות למי שרוצה לתרגל: מצאו $y \in \mathbb{N}$ כך ש- $y \equiv 3 \pmod{11}$ וגם $y \equiv 1 \pmod{8}$.

שאלה 6 (אתגר רשות). פתרו את בעיה 443 מפרוייקט אוילר¹ (מומלץ לתכנת).
תהי $g(n)$ הסדרה המוגדרת לפי

$$g(4) = 13$$

$$g(n) = g(n-1) + \gcd(n, g(n-1)) \quad \forall n > 4$$

הערכים הראשונים של הסדרה הם

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$g(n)$	13	14	16	17	18	27	28	29	30	31	32	33	34	51	54	55	60

נתון כי $g(1000) = 2524$ וכי $g(1\,000\,000) = 2624152$. מצאו את $g(10^{15})$.

בהצלחה!

¹המקור נמצא בדף <https://projecteuler.net/problem=443>