

תרגיל מספר 8 מבנים אלגבריים

11 בדצמבר 2017

1. יהיו R_1, R_2 שני חוגים. נגדיר את חוג המכפלה להיות הקבוצה $R_1 \times R_2$ עם חיבור וכפל רכיב כלומר

$$\forall (a, b), (x, y) \in R_1 \times R_2 : (a, b) + (x, y) = (a + x, b + y)$$

$$\forall (a, b), (x, y) \in R_1 \times R_2 : (a, b)(x, y) = (ax, by)$$

כאשר $a + x$ זהו חיבור של R_1 , $b + y$ זהו חיבור של R_2 . באופן דומה הכפלים המצוינים בשאלה מתייחסים לכפלים של R_1, R_2 לפי ההקשר. עובדה: זה אכן חוג. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם R_1, R_2 חוגים עם חילוק אז גם $R_1 \times R_2$

(ב) אם R_1, R_2 חוגים עם יחידה אז גם $R_1 \times R_2$

2. הוכיחו כי הבאים הם חוגים. קבעו האם אלו חוגים חילופיים, האם אלו חוגים עם יחידה והאם חוגים אלו עם חילוק.

(א) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ עם חיבור וכפל של מספרים ממשיים (שימו לב שהקבוצה שהגדרנו היא תת קבוצה של המספרים הממשיים \mathbb{R})

(ב) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ עם חיבור וכפל של מספרים ממשיים (שימו לב שהקבוצה שהגדרנו היא תת קבוצה של המספרים הממשיים \mathbb{R})

(ג) הקבוצה $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ עם כפל וחיבור מטריצות.

משפט השאריות הסיני

נצטט ונדגים מקרה פרטי של משפט השאריות הסיני:
משפט: יהיו p_1, p_2, p_3 שלושה מספרים ראשוניים שונים. יהיו n_1, n_2, n_3 מספרים טבעיים.

יהיו c_1, c_2, c_3 מספרים שלמים קבועים.
אזי למערכת המשוואות

$$\begin{aligned}x &\equiv c_1 \pmod{p_1^{n_1}} \\x &\equiv c_2 \pmod{p_2^{n_2}} \\x &\equiv c_3 \pmod{p_3^{n_3}}\end{aligned}$$

קיים פתרון (יחיד עד כדי כפולות של $p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}$)
נמחיש זאת באמצעות התרגיל הבא:
מצא x שלם המקיים

$$\begin{aligned}x &\equiv 2 \pmod{2^3} \\x &\equiv 5 \pmod{3^2} \\x &\equiv 20 \pmod{5^2}\end{aligned}$$

לפי משפט הקודם מובטח כי קיים כזאת x .

1. כיוון ש 2^3 זר ל $3^2 5^2$ (כלומר $\gcd(3^2 5^2, 2^3) = 1$) ניתן למצוא c, d שלמים כך ש

$$c \cdot 2^3 + d \cdot 3^2 5^2 = 1 = \gcd(3^2 5^2, 2^3)$$

ולכן

$$1 - c \cdot 2^3 = d \cdot 3^2 5^2$$

נסמן $e_1 = 1 - c \cdot 2^3 = d \cdot 3^2 5^2$ (השתכנעו!)

$$\begin{aligned}e_1 &= 1 \pmod{2^3} \\e_1 &= 0 \pmod{3^2 5^2}\end{aligned}$$

מצאו את e_1

(א) באותו אופן מצאו e_2 שלם המקיים

$$\begin{aligned}e_2 &= 1 \pmod{3^2} \\e_2 &= 0 \pmod{2^3 5^2}\end{aligned}$$

ו e_3 שלם המקיים

$$\begin{aligned}e_3 &= 1 \pmod{5^2} \\e_3 &= 0 \pmod{2^3 3^2}\end{aligned}$$

(ב) כעת הגדירו את $x = 2e_1 + 5e_2 + 20e_3$ ובידקו כי הוא פתרון למערכת שבשאלה.