תרגיל בית 10 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשפ"ג

שאלה 1. הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

א. אם חבורת המנה ${}^{G}\!/_{N}$ ציקלית ולא טריוויאלית, אז G אבלית.

ב. אם חבורת המנה ${}^{G}\!/_{N}$ סופית ולא טריוויאלית, אז G סופית.

ג. אם תת־החבורה $N \lhd G$ וחבורת המנה G/N אבליות, אז G אבלית.

שאלה 2. לחבורה $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ יש בדיוק שבע תת־חבורות מאינדקס 4. מצאו לפחות שלוש מהן והוכיחו שחבורות המנה לגביהן לא תמיד איזומורפיות.
אתגר רשות: מצאו את כל תת־החבורות מאינדקס 4 ואת חבורות המנה לגביהן.

שאלה 3. תהי G חבורה ותהיינה H, K תת־חבורות נורמליות המקיימות $H \cap K = \{e\}$. הוכיחו כי G איזומורפית לתת־חבורה של ${}^{G}\!/_{H} \times {}^{G}\!/_{K}$.

שאלה 4. נתבונן בחבורה $G = {}^{\mathbb{Q}}\!/_{\mathbb{Z}}$.

א. הוכיחו שהסדר של כל איבר ב-G הוא סופי, אבל שישנם איברים בחבורה מסדר גדול כרצוננו.

ב. הוכיחו או הפריכו: $G \cong \mathbb{Q}$.

ג. לקבוצת איברים $S \subseteq G$ נסמן את תת־החבורה הקטנה ביותר של G שמכילה S בסימון $\langle S \rangle$, ונאמר שהיא תת־החבורה הנוצרת על ידי S ב-G. התבוננו בתת־החבורה $H = \left\langle \frac{2}{5} + \mathbb{Z}, \frac{5}{6} + \mathbb{Z} \right\rangle$. הוכיחו כי H היא ציקלית ומצאו את האינדקס $[G : H]$.
רמז: למעשה רוצים למצוא $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ כך ש-$H = \left\langle \frac{a}{b} + \mathbb{Z} \right\rangle$, ולוודא הכלה דו־כיוונית.

ד. מצאו קבוצת איברים $S \subseteq G$ כך שתת־החבורה $K = \langle S \rangle$ היא אינסופית וגם $K \neq G$.
רמז: למה S חייבת להיות אינסופית?

תהינה $G_1, \ldots, G_n$ חבורות ותהינה $H_1, \ldots, H_n$ תת־חבורות נורמליות שלהן בהתאמה (כלומר $H_i \lhd G_i$ לכל i).

א. הוכיחו כי $H_1 \times \cdots \times H_n \lhd G_1 \times \cdots \times G_n$.

ב. הוכיחו כי $(G_1 \times \cdots \times G_n) \,/\, (H_1 \times \cdots \times H_n) \cong {}^{G_1}\!/_{H_1} \times \cdots \times {}^{G_n}\!/_{H_n}$.

ג. רשות: תהינה G, H חבורות. הוכיחו כי $(G \times H)' \cong (G)' \times (H)'$.

בהצלחה!