

תרגיל 5 במרוכבות

1. חשבו את האינטגרלים הבאים

א. $\int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$ כאשר C הוא המעגל $|z|=3$.

ב. $\int_C \frac{e^{zt}}{z^2+1} dz$ כאשר C הוא המעגל $|z|=4$ ו- $t \in \mathbb{R}$.

ג. $\int_C \frac{\sin z}{z^2-z} dz$ כאשר C הוא המעגל $|z-1|=2$.

ד. $\int_C \frac{\cos \pi z}{(z^2-1)^2} dz$ כאשר C הוא המעגל $|z-1|=1$.

ה. $\int_C \frac{\sin^4 z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}} dz$ כאשר C הוא המעגל $\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=1$ ו- $n \in \mathbb{N}$.

2. היעזרו בפונקציה $\int_C \frac{\exp(z^n)}{z} dz$ כדי לחשב את האינטגרלים

א. $\int_0^{2\pi} e^{\cos n\theta} \cos(\sin n\theta) d\theta$ ב. $\int_0^{2\pi} e^{\cos n\theta} \sin(\sin n\theta) d\theta$.

3. תהי $f(z) = u(z) + iv(z)$ פונקציה אנליטית בעיגול $|z| < 1$, $(u, v$ - פונקציות ממשיות). נניח כי $u^2(0) = v^2(0)$. הוכיחו שלכל $0 < r < 1$ מתקיים:

$$\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})^2 d\theta = \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})^2 d\theta$$