

מתמטיקה בדידה (83-116)

שיעור חזרה

יש לענות על 4 שאלות מתוך 6

ערך כל שאלה 25 נק'.

יש לציין בתחילת המחברת אילו 4 שאלות לבדוק ולרשום "טיוטא" על דפים שאינם מיועדים לבדיקה.

שאלה 1:

א. (15 נק') הוכח או הפרך: אם $A \cap B \subseteq \bar{C}$ וגם $A \cup C \subseteq B$ אז $A \cap C = \emptyset$.

ב. (10 נק') הוכח או הפרך: $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ אם ורק אם $C \subseteq A$.

פתרון:

א. נציין ש-לא קיים איבר של A ב-C אמ"מ לא קיים איבר של C ב-A אמ"מ $A \cap C = \emptyset$.

$A \cup C \subseteq B$ בפרט $A \subseteq B$ לכן $A = A \cap B \subseteq \bar{C}$ ולכן כל איברי A לא ב-C.

ב. בניח ש $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

נקח $x \in A \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in C$.

בניח ש $C \subseteq A$. ע"ס דיסטריוטיביות של חיתוך על איחוד נקבל:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cap B) \cup C$$

שאלה 2:

א. (5 נק') הגדירו מהו יחס רפלקסיבי.

נסמן $B = P(N)$ ונגדיר יחס R על B ע"י $(A_1, A_2) \in R$ כאשר $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.

ב. האם R רפלקסיבי/ סימטרי/ טרנזיטיבי? הוכח תשובתך (10 נקודות).

ג. מצא איבר שיש להוריד מ B כדי שתשובתך ל א' תתהפך. הוכח תשובתך. (10 נקודות).

פתרון:

א. יהי R יחס על קבוצה A. R רפלקסיבי אם לכל $a \in A$ מתקיים aRa .

ב. לא רפלקסיבי כי $\phi \in P(N) \wedge \phi \cap \phi = \phi$ ולכן קיים איבר ב-B שאינו מתייחס לעצמו ביחס ל-R.

סימטרי כי $ARB \Rightarrow A \cap B \neq \phi \Rightarrow B \cap A \neq \phi \Rightarrow BRA$

לא טרנזיטיבי כי

$$\{1,2\} \cap \{2,3\} \neq \emptyset \wedge \{2,3\} \cap \{3,4\} \neq \emptyset \wedge \{1,2\} \cap \{3,4\} = \emptyset$$

↓

$$\{1,2\}R\{2,3\} \wedge \{2,3\}R\{3,4\} \text{ but } \{1,2\}R\{3,4\}$$

ג. נוריד את הקבוצה הריקה מ-B. כלומר, כעת כל איבר ב-B לא ריק ולכן כל חיתוך של איבר ב-B עם עצמו שווה לעצמו ולכן לא ריק. כתוצאה מכך כל איבר ב-B מתייחס לעצמו ביחס ל-R.

שאלה 3:

יהיו $f: A \rightarrow B$ ו $g: V \rightarrow W$ פונקציות.

נגדיר $h: A \times V \rightarrow B \times W$ ע"י לכל $a \in A, v \in V$ $h(a, v) := (f(a), g(v))$.

א. (9 נק') הוכח/הפרך אחד מהסעיפים i-ii:

i. הוכח או הפרך: אם f, g חח"ע אז h חח"ע.

$$h(a, v) = h(x, y) \quad \text{ניקח:}$$

$$(f(a), g(v)) = (f(x), g(y)) \quad \text{לכן:}$$

$$f(a) = f(x) \wedge g(v) = g(y) \quad \text{משווין קואורדינטה - קואורדינטה:}$$

$$a = x \wedge v = y \quad \text{חח"ע" f, g}$$

$$(a, v) = (x, y) \quad \text{ולכן:}$$

ii. הוכח או הפרך: אם f על B ו g על W אז h היא על $B \times W$.

$$\forall (s, t) \in B \times W \quad \underbrace{\exists a \in A: f(a) = s \wedge \exists v \in V: g(v) = t}_{\text{כ על } f, g} \Rightarrow \exists (a, v): h(a, v) = (f(a), g(v)) = (s, t)$$

ב. (8 נק') נגדיר $H: P(A \times V) \rightarrow P(B \times W)$ ע"י $H(X \times Y) = (X \times Y) \cap (B \times W)$.

הוכיחו כי H חח"ע אם ורק אם $A \times V \subseteq B \times W$.

*אם $A \times V \subseteq B \times W$ אז לכל $X \times Y \subseteq A \times V$ מתקיים $X \times Y \subseteq B \times W$ ולכן

$$H(X \times Y) = (X \times Y) \cap (B \times W) = (X \times Y)$$

לקבוצה שמכילה אותה נקראת שיכון).

* H חח"ע.

נניח שלא מתקיים $A \times V \subseteq B \times W$, אזי קיים איבר x ב- $A \times V$ שאיננו ב- $B \times W$. כתוצאה

מכך $\{x\}, \emptyset \in P(A \times V)$ כך ש-

$$H(\emptyset) = \emptyset \cap B \times W = \emptyset = \{x\} \cap B \times W = H(\{x\})$$

אבל $\{x\}$ שונה מ- \emptyset , בסתירה לכך ש- H חח"ע.

ג. (8 נק') יהיו B, A קבוצות שוות עוצמה, ויהיו D, C קבוצות שוות עוצמה. הוכח

$$|A \times C| = |B \times D|$$

$\exists f : A \rightarrow B, g : C \rightarrow D$ קבוצות שוות עוצמה ו- D, C קבוצות שוות עוצמה, לכן f, g הפיכה הפיכה. נגדיר $h : A \times C \rightarrow B \times D$ באופן הבא: $h(a, c) = (f(a), g(c))$ ונראה שהיא הפיכה להוכחת המבוקש. ניתן להראות חח"ע על של h , או לתת הפיכה ולהוכיח שהיא גותנת ID משני הכיוונים). טענה- $h^{-1}(x, y) = (f^{-1}(x), g^{-1}(y))$ כי קיימות f, g הפיכות. נוכיח שהיא אכן הופכת את h :

$$hh^{-1}(x, y) = h(f^{-1}(x), g^{-1}(y)) = \underbrace{(ff^{-1}(x), gg^{-1}(y))}_{\text{כ } f, g \text{ הן ההופכות של } f^{-1}, g^{-1}} = (x, y)$$

$$h^{-1}h(a, c) = h^{-1}(f(a), g(c)) = \underbrace{(f^{-1}f(a), g^{-1}g(c))}_{\text{כ } f^{-1}, g^{-1} \text{ הן ההופכות של } f, g} = (a, c)$$

שאלה 4:

א. (12 נק') בדוק האם שני הפסוקים שקולים, ללא שימוש בטבלת אמת:

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg p) ; p \rightarrow \neg(q \rightarrow r)$$

ב. (13 נק') פשטו את הביטוי: $(r \rightarrow p) \wedge \neg r \wedge (q \rightarrow \neg r)$.

פתרון:

א. הוכחנו ש- $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ ולכן:

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg p) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg p) \equiv \neg p \vee (q \wedge \neg r) \equiv p \rightarrow (q \wedge \neg r) \equiv p \rightarrow \neg(\neg q \vee r) \equiv p \rightarrow \neg(q \rightarrow r)$$

ב. הוכחנו בכיתה כי $A \wedge (B \vee A) \equiv A$ ולכן:

$$(r \rightarrow p) \wedge \neg r \wedge (q \rightarrow \neg r) \equiv (\neg r \vee p) \wedge \neg r \wedge (\neg q \vee \neg r) \equiv \neg r$$

שאלה 5:

א. (13 נק') מצאו את מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 70$, כך שהמשתנים בעלי אינדקס זוגי גדולים מ-5 והמשתנים בעלי האינדקס האי זוגי הם לפחות 4.

ב. (12 נק') מטילים 8 קוביות שונות. מהו מספר התוצאות האפשריות בהן מופיע כל אחד מהמספרים 1 עד 6 לפחות פעם אחת (כלומר, סדר התוצאות משנה)?
(הערה: אין קשר בין הסעיפים).

פתרון
א.

$$y_i \begin{cases} = x_i - 6 \geq 0, i = 2,4 \\ = x_i - 4 \geq 0, i = 1,3,5 \end{cases} \text{ מבקשים } x_1 + \dots + x_5 = 70: x_i \begin{cases} > 5, i = 2,4 \\ \geq 4, i = 1,3,5 \end{cases} \text{ נגדיר משתנים חדשים:}$$

ונקבל $y_1 + \dots + y_5 = x_1 + \dots + x_5 - 12 - 12 = 70 - 24 = 46: y_i \geq 0$ אשר הוכחנו בכיתה כי מספר הפיתרונות עבורו הוא כמספר הבחירות של 46 מתוך 5 עם חזרות ובלי חשיבות לסדר:

$$\binom{46+5-1}{5-1}$$

ב. נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה. נגדיר:

נגדיר:

U - קבוצת כל ההטלות האפשריות. ללא המגבלה זוהי בחירה של 8 מ-6 עם חזרות ועם חשיבות לסדר:

$$|U| = 6^8. \text{ ו- } A_i \text{ - קבוצת ההטלות בהן המספר } i \text{ לא הופיע. לכן מבקשים } \left| \bigcap_{i=1}^6 A_i^c \right| = |U| - \left| \bigcup_{i=1}^6 A_i \right|$$

$$\left. \begin{cases} |A_1| = 5^8 \text{ - קבוצת ההטלות בהן המספר 1 לא הופיע.} \\ |A_2| = 5^8 \text{ - קבוצת ההטלות בהן המספר 2 לא הופיע.} \\ \vdots \\ |A_6| = 5^8 \text{ - קבוצת ההטלות בהן המספר 6 לא הופיע.} \end{cases} \right\} \binom{6}{1} |A_i| = 6 |A_i|$$

כמו כן לכל $1 \leq i < j \leq 6$, ויש $|A_i \cap A_j| = 4^8$ דרכים לבחירת צמד קבוצות.

לכל $1 \leq i < k < j \leq 6$, ויש $|A_i \cap A_k \cap A_j| = 3^8$ דרכים לבחירת שלישיית קבוצות.

וכן הלאה...

נקבל,

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_6}| = 6^8 - \binom{6}{1} 5^8 + \binom{6}{2} 4^8 - \binom{6}{3} 3^8 + \binom{6}{4} 2^8 - \binom{6}{5} 1^8 + \binom{6}{6} 0^8$$

שאלה 6:

מצא נוסחת נסיגה (כולל תנאי התחלה) למספר הדרכים לבניית מספר טבעי מאורך n בו (13 נק') זוגיות כל סיפרה שונה מזוגיות הסיפרה שאחריו. א.

ב. (12 נק') אין שתי ספרות זוגיות רצופות.

יהי A_i מספר חוקי מאורך i , ו- $f(i)$ מספר הדרכים ליצור אותו.
 נחפש $f(n)$. (נסמן באופן לא פורמלי $f^{(r)}(i)$ עבור מספר המספרים מאורך i שנגמרים בסיפרה זוגית, ו- $f^{(r^*)}(i)$ עבור מספר המספרים מאורך i שנגמרים בסיפרה אי זוגית).

א. (13 נק') זוגיות כל סיפרה שונה מזוגיות הסיפרה שאחריו.

$$\begin{array}{r} \underline{A_{n-1}} \\ \text{ז' אפ' 5} \\ \text{ז' אפ' 5} \end{array}$$

$$f(n) = 5f^{(r)}(n-1) + 5f^{(r^*)}(n-1) = 5f(n-1)$$

$$f(1) = 9$$

ב. (12 נק') אין שתי ספרות זוגיות רצופות.

$$\begin{array}{r} \underline{A_{n-1}} \\ \text{ז' אפ' 5} \\ \text{ז' אפ' 10} \end{array}$$

$$f(n) = 5f^{(r)}(n-1) + 10f^{(r^*)}(n-1) = 5f(n-1) + 5f^{(r^*)}(n-1) = 5f(n-1) + 5f(n-2)$$

$$f(1) = 9$$

$$f(2) = 5*10 + 4*5$$

בהצלחה!