# מתמטיקה בדידה (83-116)
# שיעור חזרה

**יש לענות על 4 שאלות מתוך 6**
ערך כל שאלה 25 נק'.
יש לציין בתחילת המחברת אילו 4 שאלות לבדוק ולרשום "טיוטא" על דפים שאינם מיועדים לבדיקה.

## שאלה 1:

א. (15 נק') הוכח או הפרך: אם $A \cap B \subseteq \overline{C}$ וגם $A \cup C \subseteq B$ אז $A \cap C = \varnothing$.

ב. (10 נק') הוכח או הפרך: $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ אם ורק אם $C \subseteq A$.

**פתרון:**
א. נציין ש-לא קיים איבר של A ב-C אמ"מ לא קיים איבר של C ב-A אמ"מ $A \cap C = \varnothing$.
$A \cup C \subseteq B$ בפרט $A \subseteq B$ לכן $A = A \cap B \subseteq \overline{C}$ ולכן כל אייברי A לא ב-C.

ב.נניח ש $\overline{(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)}$.
נקח $x \in C$ <= $x \in (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ <= $x \in A$.

נניח ש $\overline{C \subseteq A}$. ע"ס דיסטריבוטיביות של חיתוך על איחוד נקבל:
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cap B) \cup C$.

## שאלה 2:

א. (5 נק') הגדירו מהו יחס רפלקסיבי.

*נסמן* $B = P(N)$ *ונגדיר יחס* $R$ *על* $B$ *ע"י* $(A_1, A_2) \in R$ *כאשר* $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$.
ב. האם $R$ רפלקסיבי/ סימטרי / *טרנזיטיבי*? . הוכח תשובתך (10 נקודות).
ג. מצא איבר שיש להוריד מ $B$ כדי שתשובתך ל א' תתהפך. הוכח תשובתך. (10 נקודות).

*פתרון:*
א. *יהי* $R$ *יחס על קבוצה* $A$. $R$ *רפלקסיבי אם לכל* $a \in A$ *מתקיים* $aRa$.

ב. *לא רפלקסיבי כי* $\phi \in P(N) \wedge \phi \cap \phi = \phi$ *ולכן קיים איבר ב-*$B$ *שאינו מתייחס לעצמו ביחס ל-*$R$.

*סימטרי כי* $ARB => A \cap B \neq \phi => B \cap A \neq \phi => BRA$

*לא טרנזיטיבי כי*

$$\{1,2\}\cap\{2,3\}\neq\phi\wedge\{2,3\}\cap\{3,4\}\neq\phi\wedge\{1,2\}\cap\{3,4\}=\phi$$
$$\Downarrow$$
$$\{1,2\}R\{2,3\}\wedge\{2,3\}R\{3,4\}\,but\ \ \{1,2\}\not R\{3,4\}$$

ג. נוריד את הקבוצה הריקה מ-$B$. כלומר, כעת כל איבר ב-$B$ לא ריק ולכן כל חיתוך של איבר ב-$B$ עם עצמו שווה לעצמו ולכן לא ריק. כתוצאה מכך כל איבר ב-$B$ מתייחס לעצמו ביחס ל-$R$.

## **שאלה 3:**

יהיו $f:A\to B$ ו $g:V\to W$ פונקציות.

נגדיר $h:A\times V\to B\times W$ ע"י לכל $a\in A,v\in V$ $h(a,v):=(f(a),g(v))$.

א. (9 נק') הוכח/הפרך **אחד מהסעיפים i-ii**:

$i$. הוכח או הפרך: אם $f,g$ חח"ע אז $h$ חח"ע.

*ניקח:* $h(a,v)=h(x,y)$

*לכן:* $(f(a),g(v))=(f(x),g(y))$

*משויון קואורדינטה–קואורדינטה:* $f(a)=f(x)\wedge g(v)=g(y)$

*$f,g$ חח"ע:* $a=x\wedge v=y$

*ולכן:* $(a,v)=(x,y)$

$ii$. הוכח או הפרך: אם $f$ על $B$ ו $g$ על $W$ אז $h$ היא על $B\times W$.

$$\forall(s,t)\in B\times W\quad\underbrace{\exists a\in A:\ f(a)=s\wedge\exists v\in V:g(v)=t}_{\text{כי } f,g \text{ על}}\Rightarrow\exists(a,v):h(a,v)=(f(a),g(v))=(s,t)$$

ב. (8 נק') נגדיר $H:P(A\times V)\to P(B\times W)$ ע"י $H(X\times Y)=(X\times Y)\cap(B\times W)$.

הוכיחו כי $H$ חח"ע אם ורק אם $A\times V\subseteq B\times W$.

*אם $A\times V\subseteq B\times W$ אז לכל $X\times Y\subseteq A\times V$ מתקיים $X\times Y\subseteq B\times W$ ולכן $H(X\times Y)=(X\times Y)\cap(B\times W)=(X\times Y)$ שהיא בוודאי חח"ע (פונקציית הזהות מקבוצה לקבוצה שמכילה אותה נקראת שיכון).

* H חח"ע.

נניח שלא מתקיים $A\times V\subseteq B\times W$, אזי קיים איבר x ב- $A\times V$ שאיננו ב- $B\times W$. כתוצאה מכך $\{x\},\phi\in P(A\times V)$ כך ש-

$H(\phi)=\phi\cap B\times W=\phi=\{x\}\cap B\times W=H(\{x\})$,

אבל {x} שונה מ- $\phi$, בסתירה לכך ש-H חח"ע.

ג. (8 נק') יהיו B,A קבוצות שוות עוצמה, ויהיו D,C קבוצות שוות עוצמה. הוכח $|A\times C|=|B\times D|$.

B,A קבוצות שוות עוצמה ו-D, C קבוצות שוות עוצמה, לכן $\exists \underset{הפיכה}{f} : A \to B,\ \underset{הפיכה}{g} : C \to D$.

נגדיר $h : A \times C \to B \times D$ באופן הבא: $h(a,c) = (f(a), g(c))$ ונראה שהיא הפיכה להוכחת המבוקש.

(ניתן להראות חח"ע+על של h, או לתת הפיכה ולהוכיח שהיא נותנת ID משני הכיוונים).

טענה- $h^{-1}(x,y) = (f^{-1}(x), g^{-1}(y))$ ($f^{-1}, g^{-1}$ קיימות כי f,g הפיכות). נוכיח שהיא אכן הופכת את h:

$$hh^{-1}(x,y) = h(f^{-1}(x), g^{-1}(y)) = \underbrace{(ff^{-1}(x), gg^{-1}(y)) = (x,y)}_{f^{-1},g^{-1} \text{ של } \text{ההופכיות} \text{ הן } f,g \text{ כי}}$$

$$h^{-1}h(a,c) = h^{-1}(f(a), g(c)) = \underbrace{(f^{-1}f(a), g^{-1}g(c)) = (a,c)}_{f,g \text{ של } \text{ההופכיות} \text{ הן } f^{-1},g^{-1} \text{ כי}}$$

## <u>שאלה 4:</u>

א. (12 נק') בדוק האם שני הפסוקים שקולים, ללא שימוש בטבלת אמת:

$(p \to q) \wedge (r \to \neg p)\ ;\ p \to \neg(q \to r)$.

ב. (13 נק') פשטו את הביטוי: $(r \to p) \wedge \neg r \wedge (q \to \neg r)$.

פתרון:

א. הוכחנו ש- $A \to B \equiv \neg A \vee B$ ולכן:

$$(p \to q) \wedge (r \to \neg p) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg p) \equiv \neg p \vee (q \wedge \neg r) \equiv p \to (q \wedge \neg r) \underset{\text{דה מורגן}}{\equiv} p \to \neg(\neg q \vee r) \equiv p \to \neg(q \to r)$$

ב. הוכחנו בכיתה כי $A \wedge (B \vee A) \equiv A$ ולכן:

$$(r \to p) \wedge \neg r \wedge (q \to \neg r) \equiv (\neg r \vee p) \wedge \neg r \wedge (\neg q \vee \neg r) \equiv \neg r$$

## <u>שאלה 5:</u>

א. (13 נק') מצאו את מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 70$, כך שהמשתנים בעלי אינדקס זוגי גדולים מ-5 והמשתנים בעלי האינדקס האי זוגי הם לפחות 4.

ב. (12 נק') מטילים 8 קוביות שונות. מהו מספר התוצאות האפשריות בהן מופיע כל אחד מהמספרים 1 עד 6 לפחות פעם אחת (כלומר, סדר התוצאות משנה)?

**(הערה: אין קשר בין הסעיפים).**

פתרון

א.

מבקשים $x_i\begin{cases} > 5, i=2,4 \\ \geq 4, i=1,3,5 \end{cases}$ : $x_1+\ldots+x_5=70$ . נגדיר משתנים חדשים: $y_i\begin{cases} = x_i-6\geq 0, i=2,4 \\ = x_i-4\geq 0, i=1,3,5 \end{cases}$

ונקבל $y_i\geq 0$ : $y_1+\ldots+y_5=x_1+\ldots+x_5-12-12=70-24=46$ אשר הוכחנו בכיתה כי מספר הפיתרונות עבורו הוא כמספר הבחירות של 46 מתוך 5 עם חזרות ובלי חשיבות לסדר:

$\binom{46+5-1}{5-1}$.

ב. נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה. נגדיר:

נגדיר:

$U$ - קבוצת כל ההטלות האפשריות. ללא המגבלה זוהי בחירה של 8 מ-6 עם חזרות ועם חשיבות לסדר: $|U|=6^8$. ו- $A_i$ - קבוצת ההטלות בהן המספר i לא הופיע. לכן מבקשים $\left|\bigcap_{i=1}^{6}A_i^c\right|=|U|-\left|\bigcup_{i=1}^{6}A_i\right|$.

$A_1$ - קבוצת ההטלות בהן המספר 1 לא הופיע. $|A_1|=5^8$.

$A_2$ - קבוצת ההטלות בהן המספר 2 לא הופיע. $|A_2|=5^8$.

$\vdots$

$A_6$ - קבוצת ההטלות בהן המספר 6 לא הופיע. $|A_6|=5^8$.

$6|A_i|=\binom{6}{1}|A_i|$.

כמו כן לכל $1\leq i<j\leq 6$, $|A_i\cap A_j|=4^8$ ויש $\binom{6}{2}$ דרכים לבחירת צמד קבוצות.

לכל $1\leq i<k<j\leq 6$, $|A_i\cap A_k\cap A_j|=3^8$ ויש $\binom{6}{3}$ דרכים לבחירת שלישיית קבוצות.

וכן הלאה...

נקבל,

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_6}|=6^8-\binom{6}{1}5^8+\binom{6}{2}4^8-\binom{6}{3}3^8+\binom{6}{4}2^8-\binom{6}{5}1^8+\binom{6}{6}0^8$$

## שאלה 6:

מצא נוסחת נסיגה (כולל תנאי התחלה) למספר הדרכים לבניית מספר **טבעי** מאורך n בו

א. (13 נק') זוגיות כל סיפרה שונה מזוגיות הסיפרה שאחריו.

ב. (12 נק') אין שתי ספרות זוגיות רצופות.

יהי $A_i$ מספר חוקי מאורך i, ו- $f(i)$ מספר הדרכים ליצור אותו.

נחפש $f(n)$. (נסמן באופן לא פורמלי $f^{(ז)}(i)$ עבור מספר המספרים מאורך i שנגמרים בסיפרה זוגית, ו- $f^{(א"ז)}(i)$ עבור מספר המספרים מאורך i שנגמרים בסיפרה אי זוגית).

א. (13 נק') זוגיות כל סיפרה שונה מזוגיות הסיפרה שאחריו.

| ___ | An-1 |
|---|---|
| 5אפ' | ז |
| 5אפ' | א"ז |

$$f(n) = 5f^{(ז)}(n-1) + 5f^{(א"ז)}(n-1) = 5f(n-1)$$
$$f(1) = 9$$

ב. (12 נק') אין שתי ספרות זוגיות רצופות.

| ___ | An-1 |
|---|---|
| 5אפ' | ז-5 אפ' |
| 10אפ' | א"ז-5אפ' |

$$f(n) = 5\cdot 5f^{(ז)}(n-1) + 5\cdot 10f^{(א"ז)}(n-1) = 5\cdot 5f(n-1) + 5\cdot 5f^{(א"ז)}(n-1) = 5\cdot 5f(n-1) + 5\cdot 5f(n-2)$$
$$f(1) = 9$$
$$f(2) = 5*10 + 4*5$$

בהצלחה!