תרגיל בית 12

1. נניח ו H הינו מרחב הילברט עם בסיס בן מנייה ונניח כי $\|x_n\| \to \|x\|$ כאשר $n \to \infty$ וגם $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$ לכל $y \in H$ כאשר $n \to \infty$. הוכיחו כי $\|x_n - x\| \to 0$ כאשר $n \to \infty$.

2. נניח ו a_n הינה סדרה של מספרים ממשיים כך ש $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < \infty$ כאשר $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

3. תהי ν מידה סופית. הוכיחו כי ν הינה רציפה בהחלט ביחס למידה μ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $\mu(A) < \delta$ אזי $\nu(A) < \varepsilon$ לכל קבוצה מדידה A . (הדרכה : לצד השני, הניחו בשלילה כי לכל $\delta = 2^{-k}$ קיימת A_n כך ש $\mu(A_n) < 2^{-k}$ אבל $\nu(A_n) > \varepsilon$. הסתכלו על הקבוצה $E_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$. מה המידה של $\mu(E_k)$ כאשר $k \to \infty$? מה המידה של $\nu(E_k)$ כאשר $k \to \infty$?

4. יהיו μ ו ν שתי מידות חיוביות כך ש $\mu \ll \nu$ ו $\mu = g d\nu$. הראו כי אם f פונקציה אינטגרבילית ביחס למידה μ אזי היא אינטגרבילית ביחס למידה ν ומתקיים

$$\int fg d\nu = \int f d\mu$$

5. נניח כי μ ו ν הינן מידות חיוביות סיגמא סופיות כך ש ν הינה רציפה בהחלט ביחס ל μ . תהי $\rho = \mu + \nu$. שימו לב כי $\mu \ll \rho$ וגם כי $\nu \ll \rho$. הוכיחו כי אם $f = \frac{d\mu}{d\rho}$ ו $g = \frac{d\nu}{d\rho}$ אזי
   א. $f > 0$ כב"מ μ .
   ב. $f + g = 1$ כב"מ ρ .
   ג. $d\nu = \frac{g}{f} d\mu$.