

תרגיל מספר 3 מבנים אלגבריים

12 בנובמבר 2014

1. תהא G חבורה. הוכח כי

$$\forall g_1, g_2 \in G : (g_1 g_2)^{-1} = g_2^{-1} g_1^{-1} \quad (\text{א})$$

$$\forall g_1, g_2 \in G : (g_1 g_2)^{-1} = g_1^{-1} g_2^{-1} \quad \text{אזי } G \text{ חילופית}$$

2. תהא G חבורה בה מתקיים $(g_1 g_2)^2 = g_1^2 g_2^2$. הוכח כי G חבורה חילופית.

3. עבור $\sigma \in S_n$ ומחזור $(i_1, i_2, \dots, i_m) \in S_n$ הוכח כי מתקיים השיוון הבא

$$\sigma(i_1, i_2, \dots, i_m) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_m))$$

4. תרגיל מודרך: טענה- קיימות $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ כך שכל $\sigma \in S_n$ ניתן להציג כמכפלה שלהם והופכיהם.

$$\text{כלומר } \sigma = \prod_{i=1}^n \tau_i \quad \text{כאשר לכל } i \text{ מתקיים } \tau_i \in \{\sigma_1, \sigma_1^{-1}, \sigma_2, \sigma_2^{-1}\}.$$

אנחנו נעבוד עם $\sigma_1 = (1, 2, 3, \dots, n), \sigma_2 = (1, 2)$.

(א) הראה כי כל חילוף מהצורה $(1, i)$ ניתן להציגו ע"י σ_1, σ_2 והופכיהן. (רמז: תרגיל 3 יכול להיות לעזר)

(ב) הראה שכל חילוף (i, j) ניתן להביעו בעזרת $\{(1, k)\}_{k>2}$

(ג) הוכח את הטענה.

5. נזכיר כי A_n היא תת קבוצה של S_n של התמורות הזוגיות ומהווה חבורה ביחס להרכבה.

מצא את המרכז שלה $C(A_n)$

6. שאלת בונוס (לא חובה) נגדיר

$$G = \left\{ (a_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}} \mid \forall i \# \{a_{i,j} \neq 0\}_{j \in \mathbb{N}} < \infty \wedge \forall j \# \{a_{i,j} \neq 0\}_{i \in \mathbb{N}} < \infty \right\}$$

כלומר אוסף המטריצות מגודל אינסופי $\begin{pmatrix} * & * & \dots \\ & * & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$ המקיימות שבכל שורה (ובכל טור) יש מספר סופי של איברים ששונים מאפס.

(א) הוכח כי G עם כפל מטריצות היא מונואיד (לא לשכוח להוכיח סגירות).

(ב) עבור $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \in G$ הוכח כי אין לה הפיך משמאל ומצא את כל ההפיכים מימין שלה.