אינפי 1 – מדמ"ח – פתרון תרגיל 2

1. הערה: להלן לצורך נוחות הביטוי "מספר משמעותי" משמעותו "מספר סופי שאינו אינפיניטסימל".

i. $\frac{H+H^4+3}{3H^4-19}=\frac{\frac{H}{H^4}+\frac{H^4}{H^4}+\frac{3}{H^4}}{\frac{3H^4}{H^4}-\frac{19}{H^4}}=\frac{1+\frac{1}{H^3}+\frac{1}{H^4}}{3-\frac{19}{H^4}}$. המספר במונה הוא משמעותי (כסכום של מס' משמעותי עם אינפיניטסימל) והמספר במכנה גם הוא משמעותי מאותה סיבה. ע"כ המספר כולו הוא משמעותי כמנה של מספרים משמעותיים.

ii. $\frac{H-H^2+H^3}{H^2-H^3+H^4}=\frac{\frac{H}{H^4}-\frac{H^2}{H^4}+\frac{H^3}{H^4}}{\frac{H^2}{H^4}-\frac{H^3}{H^4}+\frac{H^4}{H^4}}=\frac{\frac{1}{H^3}-\frac{1}{H^2}+\frac{1}{H}}{\frac{1}{H^2}-\frac{1}{H}+1}$. במונה יש מס' אינפיניטסימלי (כסכום של מס' אינפיניטסימליים) ומכנה יש מס' משמעותי (סכום של מס' משמעותי עם אינפיניטסימלי) לכן סה"כ מתקבל מס' אינפיניטסימלי.

iii. $\frac{1+2H+3H^2}{64-3H}=\frac{\frac{1}{H^2}+\frac{2H}{H^2}+\frac{3H^2}{H^2}}{\frac{64}{H^2}-\frac{3H}{H^2}}=\frac{\frac{1}{H^2}+\frac{2}{H}+3}{\frac{64}{H^2}-\frac{3}{H}}$ המונה משמעותי, המכנה אינפיניטסימל (שאיננו 0), ע"כ המס' אינסופי.

iv. $\frac{8H+128+2\epsilon}{2H-256-512\epsilon}=\frac{\frac{8H}{H}+\frac{128}{H}+\frac{2\epsilon}{H}}{\frac{2H}{H}-\frac{256}{H}-\frac{512\epsilon}{H}}=\frac{8+\frac{128}{H}+\frac{2\epsilon}{H}}{2-\frac{256}{H}-\frac{512\epsilon}{H}}$ המונה והמכנה משמעותיים, ע"כ המס' משמעותי.

v. $H^2-H-5=H(H-1)-5$. כלומר זהו מס' אינסופי כמכפלה של שני מס' אינסופיים פחות מספר סופי.

vi. $\sqrt{H+1}-\sqrt{H}=(\sqrt{H+1}-\sqrt{H})\frac{(\sqrt{H+1}+\sqrt{H})}{\sqrt{H+1}+\sqrt{H}}=\frac{1}{\sqrt{H+1}+\sqrt{H}}$ והמונה משמעותי והמכנה אינסופי (סכום של מספרים אינסופיים חיוביים), ע"כ המספר אינפיניטסימלי.

vii. $\frac{\sqrt{4+\epsilon}-2}{\epsilon}=\frac{(\sqrt{4+\epsilon}-2)(\sqrt{4+\epsilon}+2)}{\epsilon(\sqrt{4+\epsilon}+2)}=\frac{2+\epsilon}{\epsilon(\sqrt{4+\epsilon}+2)}$. המונה משמעותי (כסכום של משמעותי ואינפיניטסימל), המכנה אינפיניטסימל (כמכפלה של אינפיניטסימל ומשמעותי), ע"כ המספר אינסופי.

viii. $H\left(\sqrt{4+\frac{1}{H}}-\sqrt{2}\right)$. זהו מספר אינסופי כמכפלה של מספר אינסופי עם מספר משמעותי.

ix. $H\left(\sqrt{4+\frac{1}{H}}-2\right)=H\frac{\left(\sqrt{4+\frac{1}{H}}-2\right)\left(\sqrt{4+\frac{1}{H}}+2\right)}{\sqrt{4+\frac{1}{H}}+2}=H\frac{\frac{1}{H}}{\sqrt{4+\frac{1}{H}}+2}=\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{H}}+2}$ כלומר זה מס' משמעותי כי זו חלוקה של מס' משמעותי במס' משמעותי.

2. יהי H מספר אינסופי חיובי, K מספר אינסופי חיובי הגדול ממנו. הוכיחו או הפריכו: $K-H$ מספר אינסופי.

לא נכון, למשל יהי H מס' אינסופי חיובי כלשהו, $K=H+1$, אזי $K-H=H+1-H=1$ כלומר זוהי דוגמא לכך שיוצא מספר סופי.

3. יהי H מספר אינסופי חיובי, K מספר אינסופי שלילי. הוכיחו או הפריכו: $H-K$ מספר אינסופי.

נכון. K אינסופי שלילי לכן $-K$ אינסופי חיובי (ראינו בתרגול) לכן קל לראות ש- $H+(-K)$ אינסופי (חיובי).

4. יהי H מספר אינסופי חיובי, b ממשי חיובי. הוכיחו או הפריכו: bH אינסופי חיובי.

נכון. לפי הגדרת מס' אינסופי חיובי, כדי להראות ש- bH אינסופי חיובי יש להראות כי bH גדול מכל מספר ממשי. יהי r מס' ממשי. H אינסופי חיובי לכן $H>\frac{r}{b}$, כלומר $bH>r$ כדרוש.

5. יהי ϵ אינפיניטסימל. הוכיחו או הפריכו: ϵ^2 אינפיניטסימל חיובי.

לא נכון. 0 הוא אינפיניטסימל ו- $0^2=0$ איננו חיובי.

6. יהי ϵ אינפיניטסימל שלילי. הוכיחו או הפריכו: ϵ^2 אינפיניטסימל חיובי.

נכון. ראשית, ϵ^2 הוא אינפיניטסימל כי ראינו כי כפל של אינפיניטסימליים הוא אינפיניטסימל. הוא חיובי כי בממשיים מתקיימת הנוסחה $a<0\rightarrow a^2>0$ ולפי עקרון ההעברה נקבל $\epsilon<0\rightarrow\epsilon^2>0$.

7. יהי H אינסופי חיובי, a סופי חיובי. הוכיחו או הפריכו: $H-a$ מספר חיובי.

נכון. H אינסופי חיובי לכן $H>r$ לכל מספר ממשי. ראינו בתרגול שיותר מכך מתקיים: $H>x$ לכל מספר סופי. בפרט עבור המספר הסופי a מתקיים $H>a$ כלומר $H-a>0$ כלומר $H-a$ חיובי, כדרוש.

8. יהי ϵ אינפיניטסימל. הוכיחו או הפריכו: $2^{30}\epsilon<1$

נכון. ϵ אינפיניטסימל לכן הוא קטן מכל מס' ממשי חיובי. בפרט $\epsilon<\frac{1}{2^{30}}$ כלומר $2^{30}\epsilon<1$ כדרוש.