

תרגיל 9

להגשה עד 15.1.18

נסמן:

$L^p(X) := L^p(X, \mathbb{A}, \mu)$, באשר (X, \mathbb{A}, μ) ממ"ח.
 $l^p := l^p(\mathbb{N}, \mathbb{P}(\mathbb{N}), \eta)$, באשר η הינה מידת הספירה.

שאלה 1

תהי $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{S}, m)$. הוכיחו כי: $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(x) - f(x-h)\|_1 = 0$.

שאלה 2

נניח X מרחב טופולוגי, ו- $\mathbb{B}(X) \subseteq \mathbb{A}$, ולכל V פתוחה לא ריקה מתקיים $\mu(V) > 0$.
הוכיחו כי אם $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ רציפות כך ש $f = g$ כב"מ- μ אז $f(x) = g(x)$ לכל $x \in X$,
והסיקו מכך כי לכל $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה מתקיים: $\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)| : x \in X\}$.

שאלה 3

1. נניח כי $\mu(X) < \infty$. הוכיחו כי אם $1 \leq r < p < \infty$ אזי $L^p(X) \subseteq L^r(X)$ ולכל $f \in L^p(X)$ מתקיים:

$$\|f\|_r \leq \mu(X)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}} \|f\|_p$$

2. הוכיחו כי אם $r < p$ אזי $l^r \subsetneq l^p$.

שאלה 4

תהי $(f_n)_{\mathbb{N}}$ סדרת פונקציות ממשיות מדידות- \mathbb{A} על X המתכנסת כב"מ לפונקציה f .
נניח שעבור $p \in [1, \infty)$ קיימת $g \in L^p(X)$ כך שלכל $n: |f_n| \leq g$ (כב"מ). הוכיחו כי $f_n \in L^p(X)$, וכן כי $f_n \rightarrow f$ ב $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$.

שאלה 5

יהי $p \in [1, \infty)$, ותהי $f \in L^p(X)$. הוכיחו כי הקבוצה: $\{x \mid f(x) \neq 0\} = [f \neq 0]$ הינה σ -סופית (כלומר, ניתן להציג את הקבוצה כאיחוד של קבוצות מדידות ובעלות מידה סופית).

שאלה 6

נגדיר: $F := \{(a_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid \sup_n n|a_n| < \infty\}$. הוכיחו או הפריכו:

1. F תת מרחב לינארי של l^2 .

2. הקבוצה $F \cap l^2$ סגורה ב- l^2 .