תרגיל 9

להגשה עד 15.1.18

נסמן:

$L^p(X) := L^p(X, \mathbb{A}, \mu)$, באשר $(X, \mathbb{A}, \mu)$ ממ"ח.

$l^p := L^p(\mathbb{N}, \mathbb{P}(\mathbb{N}), \eta)$, באשר η הינה מידת הספירה.

שאלה 1

תהי $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{S}, m)$. הוכיחו כי: $\lim_{h\to 0} \|f(x) - f(x-h)\|_1 = 0$.

שאלה 2

נניח X מרחב טופולוגי, ו־ $\mathbb{B}(X) \subseteq \mathbb{A}$, ולכל V פתוחה לא ריקה מתקיים $\mu(V) > 0$.

הוכיחו כי אם $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ רציפות כך ש $f = g$ כב"מ־μ אז $f(x) = g(x)$ לכל $x \in X$,

והסיקו מכך כי לכל $f \colon X \to \mathbb{R}$ רציפה מתקיים: $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$.

שאלה 3

1. נניח כי $\mu(X) < \infty$. הוכיחו כי אם $1 \le r < p < \infty$ אזי $L^p(X) \subseteq L^r(X)$ ולכל $f \in L^p(X)$ מתקיים: $\|f\|_r \le \mu(X)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}} \|f\|_p$.
2. הוכיחו כי אם $r < p$ אזי $l^r \subsetneqq l^p$.

שאלה 4

תהי $(f_n)_\mathbb{N}$ סדרת פונקציות ממשיות מדידות־$\mathbb{A}$ על X המתכנסת כב"מ לפונקציה f.

נניח שעבור $p \in [1, \infty)$ קיימת $g \in L^p(X)$ כך שלכל n: $|f_n| \le g$ (כב"מ). הוכיחו כי $f,\ f_n \in L^p(X)$, וכן כי $f_n \to f$ ב $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$.

שאלה 5

יהי $p \in [1, \infty)$, ותהי $f \in L^p(X)$. הוכיחו כי המידה של הקבוצה: $[f \neq 0] = \{x \mid f(x) \neq 0\}$ הינה σ־ סופית (כלומר, ניתן להציג את הקבוצה כאיחוד של קבוצות מדידות ובעלות מידה סופית).

שאלה 6

נגדיר: $F := \{(a_n)_\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \mid \sup_n n|a_n| < \infty\}$. הוכיחו או הפריכו:

1. F תת מרחב לינארי של l^2.
2. הקבוצה $F \cap l^2$ סגורה בl^2.

בהנאה ☺