תרגיל 1 - שאלות

תרגיל 1. יהיו X,Y מרחבים נורמיים עם הנורמות $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ בהתאמה. מי מהפונקציות הבאות היא נורמה על $X \times Y$. נמקו. החיבור והכפל בסקרל מוגדרים על $X \times Y$ מוגדרים איבר-איבר.

1. $\|(x,y)\|_a = \|x\|_X + \|y\|_Y$.
2. $\|(x,y)\|_b = \|x\|_X \|y\|_Y$.
3. $\|(x,y)\|_c = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$.

תרגיל 2. יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ עם הממ"פ $\langle\cdot\rangle$ והנורמה המושרית $\|\cdot\|$.

1. הראו כי מתקיימת הזהות $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$.
2. יהי V מרחב נורמי עם נורמה $\|\cdot\|$ שבו מתקיים שוויון המקבילית

$2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) = \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2$.

הראו שהפונקציה

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$$

היא מכפלה פנימית על V והיא משרה את $\|\cdot\|$, ז"א שמתקיים השווין

$$\langle v,v\rangle = \|v\|^2 .$$

הדרכה: תחילה הראו את השוויון המבוקש. לאחר מכן, יש להראות שתכונות של מכפלה פנימית מתקיימות. החלק הקשה הוא להראות לינאריות ברכיב הראשון. על מנת לעשות את זה, יש תחילה להראות אדיטיביות. לאחר מכן, על מנת להראות תכונת כפל בסקלר ברכיב הראשון, משתמשים באידיטיביות על מנת להראות לכל מספר טבעי.טבעי, מראים בעזרת הגדרה שמינוס יוצא החוצה ומראים לכל מספר טבעי. מתכונת כפל בסקלר עבור שלמים, ניתן להראות עבור רצינוליים, ואחחרי רציונליים, על ידי שימוש בגבול עבור כל מספר ממשי).

תרגיל 3. נאמר שהנורמות $\|\cdot\|_a$ ו $\|\cdot\|_b$ על V שקולות, אם קיימים קבועים $0 < \alpha, \beta$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים

$$\alpha \|v\|_a \le \|v\|_b \le \beta \|v\|_a .$$

הראו, ששקילות נורמות היא יחס שקילות.

תרגיל 4. הראו שמשוואת המישור ב $\mathbb{R}^3$ שעובר דרך הנקודה (p,q,r) ומאונך לוקטור (a,b,c) היא

$$a(x-p)+b(y-q)+c(z-r)=0.$$

תרגיל 5. (תרגיל בונוס). המטרה של התרגיל הבא - להוכיח שנורמת p המוגדרת על ידי

$$\|x\|_p=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x|^p}$$

עבור $1\le p$ מגדירה נורמה על $\mathbb{R}^n$.

1. הראו ש $\|x\|_p\ge 0$ ו $\|x\|=0$ אם ורק אם $x=0$.
2. הראו שמתקיים $\|\alpha x\|=\|x\||\alpha|$ לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ ו $x\in\mathbb{R}^n$.
3. יהיו $0<x,y\in\mathbb{R}$. הראו שלכל $0\le t\le 1$ מתקיים האי-שוויון הבא:

$$(1-t)\ln x+t\ln y\le\ln((1-t)x+ty).$$

(אינטואיציה גאומרית: הקטע שמחבר את הנקודות $(x,\ln x)$ ו $(y,\ln y)$ נמצא מתחת לגרף של הפונקציה $\ln$ בקטע $[x,y]$. ניתן לעשות חקירה ולהתשמש במחבן הנגזרת השניה).

4. יהיו $1<p,q\in\mathbb{R}$ כך ש $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. הראו, שלכל $0\le a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$ab<\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

(רמז: הציבו $t=\frac{1}{q}$ והשתמשו בסעיף הקודם).

5. יהיו $1<p,q\in\mathbb{R}$ כך ש $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ו $u,v\in\mathbb{R}^n$ כך ש $\|u\|_p=\|v\|_q=1$. הראו, בעזרת הסעיף הקודם, את האי-שוויון

$$\sum_{i=1}^{n}|u_iv_i|\le 1.$$

והסיקו ממנו את אי-שוויון הולדר: לכל $1<p,q$ שמקיימים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ולכל $u,v\in\mathbb{R}^n$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n}|u_iv_i|\le\|u\|_p\|v\|_q.$$

6. הראו בעזרת האי-שוויון הולדר ובעזרת האי-שוויון

$$|u+v|^p \le (|u|+|v|)\,|u+v|^{p-1}$$

את האי-שוויון הבא:

$$\|u+v\|_p^p \le \left(\|u\|_p + \|v\|_p\right) \|u+v\|_p^{p-1}$$

והסיקו ממנו את אי-שוויון מינקובסקי:

$$\|u+v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p \,,$$

שהוא למעשה האי-שוויון המשולש עבור נורמת p. הדרכה: כדאי להתחיל לפתח את הביטוי בצד השמאלי קודם. כמו כן, שימו לב שמתקיים

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left(|u_i+v_i|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} = \|u+v\|_p^{p-1} \,.$$