אלגברה לינארית למהנדסים - פתרון תרגיל 2

<u>שאלה 1</u>

רשמו בכתיב מטריצות ופתרו את מערכות המשוואות הבאות:

א.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-4 \\ x_1+5x_2+x_3=1 \\ 3x_2+2x_3=5 \\ 3x_1-x_2-x_3=3 \\ x_1+x_2=1 \end{cases}$$

ב.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-4 \\ 3x_2+2x_3=5 \\ x_1+5x_2+x_3=2 \end{cases}$$

ג.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_4+x_5=2 \\ x_1+2x_2+x_3-3x_4+x_5+2x_6=3 \\ x_1+2x_2-3x_4+2x_5+x_6=4 \\ 3x_1+6x_2+x_3-9x_4+4x_5+3x_6=9 \end{cases}$$

ד.

$$\begin{cases} 3x_1+3x_2+2x_3+5x_4+2x_5=2 \\ 2x_3+2x_4+4x_5=4 \\ x_1+x_2+x_4-x_5=-1 \\ 3x_1+3x_2+4x_3+7x_4+6x_5=6 \end{cases}$$

א.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-4 \\ x_1+5x_2+x_3=1 \\ 3x_2+2x_3=5 \\ 3x_1-x_2-x_3=3 \\ x_1+x_2=1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&-4 \\ 1&5&1&1 \\ 0&3&2&5 \\ 3&-1&-1&3 \\ 1&1&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_5\to L_5-L_1]{\substack{L_2\to L_2-L_1 \\ L_4\to L_4-3L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&-4 \\ 0&3&2&5 \\ 0&3&2&5 \\ 0&-7&-2&15 \\ 0&-1&1&5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3\to L_3-L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&-4 \\ 0&3&2&5 \\ 0&0&0&0 \\ 0&-7&-2&15 \\ 0&-1&1&5 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3\to L_5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&-4 \\ 0&3&2&5 \\ 0&-1&1&5 \\ 0&-7&-2&15 \\ 0&0&0&0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3\to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&-4 \\ 0&-1&1&5 \\ 0&3&2&5 \\ 0&-7&-2&15 \\ 0&0&0&0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_4\to L_4-7L_2]{L_3\to L_3+3L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&-4 \\ 0&-1&1&5 \\ 0&0&5&20 \\ 0&0&-5&-20 \\ 0&0&0&0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4\to L_4+L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&-4 \\ 0&-1&1&5 \\ 0&0&5&20 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-4 \\ -x_2+x_3=5 \\ 5x_3=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ב.

$$\begin{cases} x+2y-z=-4 \\ 3y+2z=5 \\ x+5y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ & & 0 & \boxed{1} \end{array}\right)$$

תשובה סופית: אין פתרונות (המשוואה השלישית היא משוואת סתירה)

ג.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_4+x_5=2 \\ x_1+2x_2+x_3-3x_4+x_5+2x_6=3 \\ x_1+2x_2-3x_4+2x_5+x_6=4 \\ 3x_1+6x_2+x_3-9x_4+4x_5+3x_6=9 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 & 3 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - 3L_1}]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_4 \to L_4 - L_3]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_4+x_5=2 \\ x_3+2x_6=1 \\ x_5+x_6=2 \\ 0=0 \end{cases}$$

משתנים קשורים: $x_1,\ x_3,\ x_5$

משתנים חופשיים $x_2=\alpha,\ x_4=\beta,\ x_6=\gamma \Leftarrow$

$$S=\left\{ \begin{pmatrix} -2\alpha+3\beta+\gamma \\ \alpha \\ -2\gamma+1 \\ \beta \\ -\gamma+2 \\ \gamma \end{pmatrix} \ :\ \alpha,\beta,\gamma\in R \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ :\ \alpha,\beta,\gamma\in R \right\}$$

ד.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 3 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 4 & 7 & 6 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2:2 \leftrightarrow L_4}]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 4 & 7 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1}]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 \to L_3 - 2L_2 \\ L_4 \to L_4 - 4L_2}]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -34 & -34 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_4 \to L_4:34 + L_3:13]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \quad + x_4 - x_5 = -1 \\ \qquad 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 9 \\ \qquad\qquad x_5 = 1 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

משתנים קשורים x_1, x_3, x_5

משתנים חופשיים $x_2 = \beta, \quad x_4 = \alpha \Leftarrow$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ \beta \\ -\alpha \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in R \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in R \right\}$$

שאלה 2

מצאו עבור אלו ערכים של הפרמטר k יש :

1. פתרון יחיד

2. אינסוף פתרונות

3. אף פתרון

במקרים 1,2 יש לרשום במסודר את אוסף הפתרונות.

א. $\begin{cases} x_1 - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 + kx_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + kx_3 = 1 \end{cases}$ **ב.** $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 + x_4 = k \\ x_1 + x_2 + kx_3 + x_4 = k+1 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + (2-k)x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + (k+3)x_4 = k^2 \end{cases}$

<u>פתרון:</u>

א.

$$\begin{cases} x - 3z = -3 \\ 2x + ky - z = -2 \\ x + 2y + kz = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & k & -1 & -2 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & k & 5 & 4 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{L_2 \to L_2 - \frac{k}{2} L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{-k^2-3k+10}{2} & 4-2k \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to \frac{2L_3}{-k^2-3k+10}\ [k \neq 2,-5]]{L_2 \to \frac{1}{2} L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{k+3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\cancel{-}4\cancel{(k-2)}}{\cancel{-}\cancel{(k-2)}(k+5)} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = -3 \\ x_2 + \frac{k+3}{2} x_3 = 2 \\ x_3 = \frac{4}{k+5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \cdot \frac{4}{k+5} - 3 = \frac{-3-3k}{k+5} \\ x_2 = 2 - \frac{k+3}{2} \cdot \frac{4}{k+5} = \frac{4}{k+5} \\ x_3 = \frac{4}{k+5} \end{cases}$$

<u>מקרה 1</u> $\boxed{k \neq -5;\, 2}$ קיים פתרון יחיד והוא $\left(\frac{-3-3k}{k+5}, \frac{4}{k+5}, \frac{4}{k+5}\right)$.

<u>מקרה 2</u> $\boxed{k = -5}$ אין פתרון. הסבר: נציב את הערך במטריצה בשלב לפני שחילקנו ב- $-k^2 - 3k + 10$, נקבל: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}\right)$. סתירה בשורה השלישית.

<u>מקרה 3</u> $\boxed{k=2}$ יש אינסוף פתרונות. הסבר: נציב את הערך במטריצה בשלב לפני שחילקנו ב- $-k^2 - 3k + 10$ ונקבל: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 2.5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

משתנים קשורים $x_1,\ x_2$

משתנה חופשי $x_3 = \alpha$

$$S=\left\{\begin{pmatrix}3\alpha-3\\2-2.5\alpha\\\alpha\end{pmatrix}\ :\ \alpha\in R\right\}=\left\{\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}3\\-2.5\\1\end{pmatrix}\ :\ \alpha\in R\right\}$$

ב.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}k&1&1&1&1\\1&k&1&1&k\\1&1&k&1&k+1\end{array}\right)\xrightarrow[L_3\leftrightarrow L_1]{}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&k&1&k+1\\1&k&1&1&k\\k&1&1&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2\to L_2-L_1\\L_3\to L_3-kL_1}]{}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&k&1&k+1\\0&k-1&1-k&0&-1\\0&1-k&1-k^2&1-k&1-k-k^2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3\to L_3+L_2]{}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&k&1&k+1\\0&k-1&1-k&0&-1\\0&0&(2+k)(1-k)&1-k&-k(k+1)\end{array}\right)$$

מקרה 1 $\boxed{k=1}$ $\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&-2\end{array}\right)$ $\Leftarrow$ **אין פתרון**

מקרה 2 $\boxed{k=-2}$ $\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&1&-1\\0&-3&3&0&-1\\0&0&0&3&-2\end{array}\right)$ $\Leftarrow$ **אינסוף פתרונות**

משתנים קשורים x_1,x_2,x_4

משתנה חופשי $x_3=\alpha$

$$S=\left\{\begin{pmatrix}-2/3+\alpha\\1/3+\alpha\\\alpha\\-2/3\end{pmatrix}\ :\ \alpha\in R\right\}=\left\{\begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\0\\-2/3\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\ :\ \alpha\in R\right\}$$

מקרה 3 $\boxed{k\neq 1,-2}$ $\Leftarrow$ **אינסוף פתרונות**

משתנים קשורים x_1,x_2,x_3

משתנה חופשי $x_4=\alpha$

$$S=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\left(\frac{-1}{2+k}\right)+\frac{k}{(1-k)(2+k)}\\\alpha\left(\frac{-1}{2+k}\right)+\frac{-k^2+2}{(1-k)(2+k)}\\\alpha\left(\frac{-1}{2+k}\right)+\frac{-k^2-k}{(1-k)(2+k)}\\\alpha\end{pmatrix}\ :\ \alpha\in R\right\}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{k}{(1-k)(2+k)}\\\frac{-k^2+2}{(1-k)(2+k)}\\\frac{-k^2-k}{(1-k)(2+k)}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{-1}{2+k}\\\frac{-1}{2+k}\\\frac{-1}{2+k}\\1\end{pmatrix}\alpha\ :\ \alpha\in R\right\}$$

ג.
$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_4=1 \\ x_1+2x_2+2x_3+2x_4=3 \\ x_1+2x_2+4x_3+(2-k)x_4=3 \\ x_1+x_2+(k+3)x_4=k^2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 2-k & 3 \\ 1 & 1 & 0 & k+3 & k^2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4\to L_4-L_1]{\substack{L_2\to L_2-L_1 \\ L_3\to L_3-L_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -k & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 & k^2-1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3\to L_3-L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 & k^2-1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_4=1 \\ x_2+2x_3=2 \\ 2x_3-kx_4=0 \\ (k+1)x_4=k^2-1 \end{cases}$$

<u>מקרה 1</u> $\boxed{k=-1}$ $\Leftarrow$**<u>אינסוף פתרונות</u>**

משתנים קשורים x_1,x_2,x_3

משתנה חופשי $x_4=\alpha$

$$S=\left\{\begin{pmatrix} -1-3\alpha \\ 2+\alpha \\ -\frac{1}{2}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha\in R\right\}=\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha\in R\right\}$$

<u>מקרה 2</u> $\boxed{k\neq -1}$ $\Leftarrow$ פתרון יחיד $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+k^2-3k \\ 2-k^2+k \\ \frac{(k^2-k)}{2} \\ k-1 \end{pmatrix}$.

<u>שאלה 3</u>

א. האם קיימת מערכת ליניארית שיש לה שני פתרונות בדיוק ? נמקו.

ב. האם קיימת מערכת ליניארית של שתי משוואות וארבעה נעלמים כך שאוסף הפתרונות שלה הוא

$$S=\{(2a-4,\ 4-7a,\ 8,\ a)^t \ : a\in R\}$$

ג. האם קיימת מערכת ליניארית של שתי משוואות וארבעה נעלמים כך שאוסף הפתרונות שלה הוא

$$S=\{(2b-4, 3+4a-7b, b, a)^t \quad : a,b \in R\}$$

ד. האם קיימת מערכת ליניארית של שתי משוואות וארבעה נעלמים כך שאוסף הפתרונות שלה הוא

$$S=\{(2b+a+c-4, c, b, a)^t \quad : a, b, c \in R\}$$

ה. נתון ש $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ הוא פתרון של מערכת ליניארית מסוימת

א)כמה משתנים יש במערכת?
ב)כמה משוואות יש במערכת?
אם אי אפשר לתת תשובה חד משמעית לאחת השאלות, הסבירו מדוע.

ו. נתון ש $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ הוא הפתרון היחיד של מערכת ליניארית מסוימת

א)כמה משתנים יש במערכת?
ב)כמה משוואות יש במערכת?
אם אי אפשר לתת תשובה חד משמעית לאחת השאלות, הסבירו מדוע.

<u>פתרון</u>

א. לא קיימת מערכת ליניארית שיש לה שני פתרונות בדיוק כי כל מערכת ליניארית יש לה או **פתרון יחיד** או **אינסוף פתרונות** או **אף פתרון.**

ב. לא, כי לאוסף הפתרונות של מערכת ליניארית של שתי משוואות וארבעה נעלמים (אם הוא לא ריק) יש לפחות שני משתנים חופשיים.

ג.נמצא דוגמה כזאת שאוסף פתרונותיה הוא $\begin{pmatrix}2b-4\\3+4a-7b\\b\\a\end{pmatrix}$.

משתנים חופשיים : $\begin{matrix}x_4=a\\x_3=b\end{matrix}$.

משתנים קשורים:

$$\boxed{x_2}=3+4a-7b=3-7x_3+4x_4$$

כלומר $x_2+7x_3-4x_4=3$.

$$\boxed{x_1}=2b-4=2x_3-4$$

כלומר $x_1-2x_3=-4$.

מערכת כנדרש היא: $\begin{cases}x_2+7x_3-4x_4=3\\x_1-2x_3=-4\end{cases}$

או בכתיב מטריצות:

$$\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&7&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$$

ד. באופן דומה:

משתנים חופשיים :

$$x_4 = a$$
$$x_3 = b\,.$$
$$x_2 = c$$

משתנה תלוי:

$$\boxed{x_1} = 2b + a + c - 4$$

כלומר $x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = -4$.

מערכת כנדרש היא:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

או בכתיב מטריצות:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ה. נתון ש $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ הוא **פתרון** של מערכת ליניארית מסוימת

א) יש במערכת **3** משתנים

ב) **אי אפשר** לאמור כמה משוואות יש במערכת.

נראה דוגמאות של מערכות ש- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ הוא פתרון שלהן (שימו לב שאין דרישה ש- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ הוא הפתרון היחיד שלהן, כלומר יתכנו פתרונות נוספים):

א. $x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$

ב. $\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \\ x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \\ x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \\ x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \end{cases}$ וכן הלאה....

כפי שאתם רואים ניתן לרשום דוגמאות למערכות עם מספר כלשהו של משוואות ש- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ הוא פתרון שלהן.

ו. נתון ש $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ הוא **הפתרון היחיד** של מערכת ליניארית מסוימת

א) יש במערכת **3** משתנים

ב) יש במערכת**.לפחות 3** משוואות .

הסבר לסעיף ב': אם במערכת של 3 משתנים יש שתי משוואות או משוואה אחת אז או שלמערכת אין פתרון או שיש לפחות דרגת חופש אחת ולכן אינסוף פתרונות.

בהחלט יתכן שבמערכת יש יותר מ- 3 משוואות, ראו למשל את הדוגמא הבאה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

זו מערכת של 4 משוואות עם 3 נעלמים, בדקו ש- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ הוא הפתרון היחיד שלה.

שאלה 4

פתרו את מערכת המשוואות הבאות מעל הרציונליים:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+x_2+x_3+3x_4=3 \\ 6x_1+2x_2+x_3=6 \\ -x_1+x_2+x_3-x_4=-1 \end{cases}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to -R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4-3R_1]{R_2\to R_2-2R_1, R_3\to R_3-6R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to 1/3R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 8 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-8R_2, R_4\to R_3-5R_2]{R_1\to R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{26}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-17}{3} & \frac{-8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to -R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{26}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-17}{3} & \frac{-8}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4+R_3]{R_2\to R_2-R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-25}{3} & \frac{-7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{26}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to 1/3R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-25}{3} & \frac{-7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{26}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-26/3R_4]{R_1\to R_1-4/3R_4, R_2\to R_2+25/3R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 5

מצאו את כל המספרים הממשיים c כך שלמערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+cy+3z=2 \\ 2x+3y+cz=3 \end{cases}$$

א. קיים פתרון יחיד מעל הממשיים.
ב. לא קיים פתרון מעל הממשיים.
ג. קיימים אינסוף פתרונות מעל הממשיים.

פתרון: הפעם נדלג על שלבים ונדון רק בשלבים הקריטים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & c & 3 & 2 \\ 2 & 3 & c & 3 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & c+2 & 1 \\ 0 & c-1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

היינו רוצים לחלק ב־$c-1$, בשביל זה נבדוק קודם מה קורה אם $c=1$, במקרה זה נקבל שיש פתרון יחיד: $(1,\frac{1}{4},\frac{1}{4})$. אם $c\neq 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -c-3 & 0 \\ 0 & 1 & c+2 & 1 \\ 0 & 0 & -c^2-c+6 & 2-c \end{pmatrix}$$

אם $-c^2-c+6\neq 0$, ז"א אם $c\neq 2,-3$ אז קל לראות שיש פתרון יחיד. ואם $c=-3\vee c=2$ אז קיים פתרון אס"ם $c=2$ ואז יש אינסוף פתרונות. אם $c=-3$ לא קיים פתרון.

שאלה 6

נתונה מערכת משוואות המיוצגת במטריצה. חלק מהערכים לא ידועים ומסומנים ב $a_1, \ldots, a_9$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_1 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ a_4 & 0 & a_5 & 2 & a_6 & 0 \\ a_7 & 0 & a_8 & 0 & a_9 & 0 \end{array}\right)$$

א. נתון שמטריצת המקדמים מדורגת. איזה ערכים לא ידועים זה מאפשר למצוא ומה הם? (רמז: יש 3 כאלה)
פתרון: היות שהמטריצה מדורגת. חייבים להיות אפסים מתחת ל 1 בעמודה הראשונה. ולכן $a_4 = a_7 = 0$. בנוסף $a_8 = 0$ כי אם $a_8 \neq 0$ אז הוא יהיה איבר מוביל והוא לא יהיה מימין לאיבר המוביל בשורה שמעליו (a_5 או 2).

ב. נתון שמטריצת המקדמים מדורגת קנונית. איזה ערכים זה מאפשר למצוא ומה הם? (רמז: יש עוד שניים שאפשר לקבוע).
פתרון: כל איבר מוביל הוא 1 ולכן בהכרח $a_5 = 1$ כי ה 2 שמימינו לא יכול להיות איבר מוביל. בנוסף $a_2 = 0$ כי הוא מעל איבר מוביל.

ג. אם בנוסף נתון שיש 2 משתנים חופשיים. איזה ערכים זה מאפשר למצוא ומה הם? (רמז: נשאר רק ערך אחד שלא ניתן לקבוע).
פתרון: אם המשתנים הם $x_1, \ldots, x_5$ אז אנחנו רואים ממה שגילינו בינתיים ש x_2, x_4 הם משתנים חופשיים. לכן x_5 לא אמור להיות חופשי וצריך להיות לו איבר מוביל בעמודה שלו. זה מכריח $a_9 = 1$ ולכן

$$a_6 = a_3 = 0$$

ד. מצאו את הפתרון הכללי של המערכת (עם תלות באיבר הלא ידוע שנשאר).
פתרון: קיבלנו בסופו של דבר את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

וקל לראות שהפתרון הכללי הוא

$$(-a_1 s, s, -2t, t, 0)$$