תרגול 2 אינפי 3

14 בינואר 2015

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו את אי־השיוויון:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

<u>פתרון:</u>

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n}|x_i||x_j| = \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}}|x_i||x_j| \geq \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2$$

ואם נוציא שורש נקבל את הדרוש. לאי־השיוויון השני, נסמן: $x = (|x_1|, ..., |x_n|), y = (1, ..., 1)$ ולפי א"ש קושי־שוורץ:

$$| < x, y > | \leq ||x|| \cdot ||y||$$

נקבל:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i| = | < x, y > | \leq ||x|| \cdot ||y|| = \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

ואם נחלק ב־$\sqrt{n}$ נקבל את הדרוש.

הגדרה:

מטריקה על קבוצה A היא פונקציה $d : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ המקיימת:

1. חיוביות: $d(x, y) \geq 0$ ו־$x = y \longleftrightarrow d(x, y) = 0$ לכל $x, y \in A$.

2. סימטריות: $d(x,y)=d(y,x)$ לכל $x,y\in A$.

3. אי־שוויון המשולש: $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ לכל $x,y,z\in A$.

קבוצה עם מטריקה נקראת מרחב מטרי, ונסמן (A,d).

*כל נורמה משרה מטריקה ע"י:

$$d(x,y)=||x-y||$$

קל לראות שהתכונות הנדרשות ממטריקה נובעות מתכונותיה של הנורמה.

הגדרות:

תהי A קבוצה ותהי d מטריקה עליה, ויהיו $r>0$ ו־$a\in A$.

הקבוצה $B(a,r)=\{x\in A|d(x,a)<r\}$ נקראת כדור פתוח (עם מרכז a ורדיוס r).

הקבוצה $B[a,r]=\{x\in A|d(x,a)\le r\}$ נקראת כדור סגור.

קבוצה U נקראת פתוחה, אם לכל $x\in U$ קיים $r>0$ כך ש: $B(x,r)\subseteq U$.

קבוצה שמשלימתה היא קבוצה פתוחה נקראת קבוצה סגורה.

*במרחב מטרי, קבוצה היא סגורה אם היא מכילה את כל נקודות הגבול שלה.

<u>תרגיל:</u>

יהי $a\in\mathbb{N}$, $a\neq 1$. נגדיר פונקציה על $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$: $d_a(x,y)$ ע"י:

$$d_a(x,y)=\begin{cases} 0 & x=y \\ \frac{1}{a^{k(x,y)}} & x\neq y \end{cases}$$

כאשר: $k(x,y)=max\{i:a^i|(x-y)\}$. הוכיחו שזו מטריקה.

<u>פתרון:</u>

קל לראות שתכונות החיוביות והסימטריות מתקיימות. נראה שאי־שוויון המשולש אכן מתקיים.

יהיו $x,y,z\in\mathbb{Z}$ שאינם שווים זה לזה (אחרת זה ברור). נסמן: $m=min\{k(x,y),k(y,z)\}$.

מתקיים:

$$a^m|x-y,a^m|y-z\longrightarrow a^m|(x-y)-(y-z)\longrightarrow a^m|(x-z)\longrightarrow m\le k(x,z)$$

ולכן:

$$d(x,z)=\frac{1}{a^{k(x,z)}}\le\frac{1}{a^m}=max\{\frac{1}{a^{k(x,y)}},\frac{1}{a^{k(y,z)}}\}=max\{d(x,y),d(y,z)\}\le d(x,y)+d(y,z)$$

לכן א"ש המשולש מתקיים, וזו מטריקה.

תרגיל:

האם הפונקציות הבאות מטריקות על $A \times A$ כאשר A מרחב מטרי עם מטריקה d?

1. $D_1((x,y),(x_1,y_1)) = min\{|x-x_1|,|y-y_1|\}$?

לא!

$$D_1((1,3),(1,4)) = 0$$

אך:

$$(1,3) \neq (1,4)$$

לכן תכונת החיוביות לא מתקיימת וזו אינה מטריקה.

2. $D_2((x,y),(x_1,y_1)) = |x|+|y|+|x_1|+|y_1|$?

לא!

$$D_2((1,1),(1,1)) = 4 \neq 0$$

לכן תכונת החיוביות לא מתקיימת, וזו אינה מטריקה.

3. $D_3((x,y),(x_1,y_1)) = d(x,x_1)+d(y,y_1)$?

זו אכן מטריקה. d אי־שלילית ולכן גם D_3 אי־שלילית ובנוסף:

$$D_3((x,y),(x_1,y_1)) = 0 \iff d(x,x_1)+d(y,y_1) = 0 \iff d(x,x_1), d(y,y_1) = 0 \iff x = x_1, y = y_1 \iff$$

ולכן D_3 חיובית.

D_3 סימטרית כי d סימטרית. כעת, נזכור ש־d מטריקה ולכן מקיימת את א"ש המשולש,

ולכן:

$$D_3((x,y),(x_2,y_2)) = d(x,x_2)+d(y,y_2) \leq d(x,x_1)+d(x_1,x_2)+d(y,y_1)+d(y_1,y_2) = D_3((x,y),(x_1,y_1))+$$

תרגיל:

יהיו (X,d) $x_1,x_2 \in$, $r_1,r_2 > 0$ ויהיו $B(x_1,r_1),B(x_2,r_2)$ כך ש: $B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2) \neq \phi$. תהי $p \in B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$ ונסמן:

$$r = min\{r_1 - d(p,x_1), r_2 - d(p,x_2)\}$$

הוכיחו ש: $B(p,r) \subseteq B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$.

פתרון:

נוכיח קודם טענת עזר: תהי $p \in B(x,r)$ כך ש: $0 < r < R - d(x,p)$ אזי $B(p,r) \subseteq B(x,R)$.

יהי $y \in B(p,r)$ אזי $r > d(p,y)$. כעת:

$$d(y,x) \leq d(y,p) + d(p,x) < r + d(p,x) \leq R$$

ולכן: $y \in B(x,R)$. לכן $B(p,r) \subseteq B(x,R)$.

כעת, מכיוון ש־$p \in B(x_1,r_1)$ ומטענת העזר נקבל שמתקיים: $B(p,r) \subseteq B(x_1,r_1)$ ($x = x_1, r = r_1$). באופן דומה: $B(p,r) \subseteq B(x_2,r_2)$ ולכן:

$$B(p,r) \subseteq B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$$

תרגיל:

האם הקבוצות הבאות פתוחות? סגורות?

1. $\mathbb{Q}$ בתוך $\mathbb{R}$.

לא פתוחה, כי בכל כדור פתוח עם מרכז רציונלי יש נקודות אי־רציונליות. באופן דומה המשלים אינה פתוחה (בכל כדור פתוח עם מרכז אי־רציונלי יש נקודות רציונליות) ולכן לא סגורה.

2. $\{x\}$בתוך $\mathbb{R}$ עבור $x \in \mathbb{R}$.

לא פתוחה, לכל $r > 0$, $B(x,r) \nsubseteq \{x\}$. לכל $y \in \{x\}^c$ מתקיים $B(y, \frac{|x-y|}{2}) \subseteq \{x\}^c$ לכן המשלים פתוחה ולכן $\{x\}$ סגורה.

הגדרה:

נאמר ש־x היא נקודת הצטברות של קבוצה A אם בכל סביבה שלה יש נקודה ששייכת ל־A. במרחבים מטריים, נאמר שלכל $r > 0$ קיים $y \in A$ כך ש־$y \in B(x,r)$.

במרחבים מטריים, נקודת הצטברות היא נקודת גבול. לכן, קבוצה היא סגורה אם היא מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה.

תרגיל:

מצאו את קבוצת נקודות ההצטברות של הקבוצות הבאות:

1. $\mathbb{Q}$ בתוך $\mathbb{R}$.

לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $r > 0$ קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש: $q \in B(x,r)$ ולכן קבוצת נקודות ההצטברות היא כל $\mathbb{R}$.

2. הקטע $(0,1)$ בתוך $\mathbb{R}$.

לכל $x \in [0,1]$ נסמן: $r = \frac{1}{2}min\{x, 1-x\}$ ואז קיים $y \in (0,1)$ כך ש: $y \in B(x,r)$.
עם אותו r נקבל שכל $x \notin [0,1]$ אינו נקודת הצטברות, ולכן סה"כ מדובר על $[0,1]$.

<u>תרגיל:</u>

נסמן ב־$A'-$ את אוסף נקודות ההצטברות של A. יהי $X=\mathbb{R}$. תהי $A=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.
מהן A', A''?

<u>פתרון:</u>

$0\in A'$ כי $lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. מצד שני, אם ניקח סדרה $A \subseteq \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$אפשר לסדר אותה כתת סדרה של $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ולכן נקודת הגבול היחידה היא 0 וסה"כ $\{0\}=A'$. לכן, $A''=\phi$.