

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שימצאו ברשותו חומרי
עזר אסורים או יתפס בהעתקה
יענש בחומרה עד כדי הרחקתו
מהאוניברסיטה

שאלון סגור

בוחן באינפי' 1 (89-132) – 24/12/2018
משך הבוחן: שעה וחצי

מותר להשתמש במחשבון.

לכתוב את התשובות רק במקום המסומן. מחברות הבחינה הן טיוטה ולא יבדקו.

1. (30 נק')

15 נק' א. גזרו את הפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 18}$ לפי הגדרה.

15 נק' ב. יהיו u, v פונקציות גזרות של המשתנה x ותהי $y = u^2 + \sqrt{v} + e^{uv}$. בטאו את $\frac{dy}{dx}$ ע"י $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$.

$$\text{st} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \text{st} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

$$= \text{st} \left(\frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2 + x + \Delta x + 18} - \sqrt{x^2 + x + 18}}{\Delta x} \right)$$

$$= \text{st} \left(\frac{(x+\Delta x)^2 + x + \Delta x + 18 - x^2 - x - 18}{\Delta x (\sqrt{(x+\Delta x)^2 + x + \Delta x + 18} + \sqrt{x^2 + x + 18})} \right)$$

$$= \text{st} \left(\frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + x + \Delta x + 18 - x^2 - x - 18}{\Delta x (\sqrt{(x+\Delta x)^2 + x + \Delta x + 18} + \sqrt{x^2 + x + 18})} \right)$$

$$= \text{st} \left(\frac{2x\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x}{\Delta x (\sqrt{(x+\Delta x)^2 + x + \Delta x + 18} + \sqrt{x^2 + x + 18})} \right)$$

$$= \text{st} \left(\frac{2x + \Delta x + 1}{\sqrt{(x+\Delta x)^2 + x + \Delta x + 18} + \sqrt{x^2 + x + 18}} \right)$$

$$= \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 18} + \sqrt{x^2 + x + 18}} = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 18}}$$

$$\frac{dg}{dx} = 2u \frac{du}{dx} + \frac{1}{2\sqrt{v+e^{uv}}} \left(\frac{dv}{dx} + e^{uv} \left(\frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx} \right) \right)$$

2. (30 נק')

מצאו לאילו ערכי a ו b ממשיים הפונקציה הבאה רציפה בקטע $[-1, 3]$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-a}{x-3} & -1 \leq x < 3 \\ b & x = 3 \end{cases}$$

עבור $-1 < x < 3$ הפונ' רצופה כהוכחה, הערש
 ומה שאם פונ' רצופות (ו-גא עיני השועש ת"ב),
 $x < 3$ עיני פתונה ע"א מתיאום).

$x = -1 \rightarrow$ נקודת קיצון (מקסימום) \rightarrow נגזרת = 0

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+1} - a}{x-3} \stackrel{0 < \Delta x < 0}{=} \text{st} \left(\frac{\sqrt{-1+\Delta x+1} - a}{-1+\Delta x-3} \right)$$

$$= \frac{-a}{-4} = \frac{a}{4} = f(-1)$$

$a = 2$ \rightarrow נקודת קיצון (מינימום) \rightarrow נגזרת = 0

$x = 3 \rightarrow$ נקודת קיצון (מינימום) \rightarrow נגזרת = 0

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x+1} - a}{x-3} \stackrel{0 > \Delta x > 0}{=} \text{st} \left(\frac{\sqrt{3+\Delta x+1} - a}{3+\Delta x-3} \right)$$

$$= \text{st} \left(\frac{\sqrt{4+\Delta x} - a}{\Delta x} \right) = \text{st} \left(\frac{4+\Delta x - a^2}{\Delta x (\sqrt{4+\Delta x} + a)} \right)$$

~~SA~~ נקודת קיצון (מינימום) \rightarrow נגזרת = 0 \rightarrow $u - a^2 = 0$ \rightarrow $a \in \mathbb{R}$. נקודת קיצון \rightarrow $a = \pm 2$

$$= \text{st} \left(\frac{1}{\sqrt{4+\Delta x} + 2} \right) = \frac{1}{4} = f(3) = b$$

$$= \text{st} \left(\frac{1}{\sqrt{4+\Delta x} - 2} \right) \rightarrow$$

$$= \text{st} \left(\frac{\sqrt{4+\Delta x} + 2}{\Delta x} \right) = \text{st} \left(\frac{\sqrt{4+\Delta x} + 2}{\Delta x} \right)$$

$$\boxed{a = 2 \quad b = \frac{1}{4} \quad \text{נקודת קיצון}}$$

3. (40 נק') סמנו נכון / לא נכון. (רק לסמן. אין צורך להסביר.)

א. לכל מספר היפרממשי חיובי קיים מספר היפרממשי חיובי הגדול ממנו.
נכון לא נכון

ב. אם $f(x)$ לא מוגדרת בנקודה x_0 אז יש לה נקודת אי-רציפות סליקה ב- x_0 .
נכון לא נכון

ג. אם ϵ, δ שני מספרים אינפיניטסימליים שונים מ-0, אז ל- $\frac{\epsilon}{\delta}$ אין חלק סטנדרטי.
נכון לא נכון

ד. אם $st(a+b)$ קיים אז $st(a)$ קיים וגם $st(b)$ קיים.
נכון לא נכון

ה. אם $f(x)$ רציפה ב- x_0 ו- $g(x)$ לא רציפה ב- x_0 אז $f(x) + g(x)$ לא רציפה ב- x_0 .
נכון לא נכון

ו. אם $f(x)$ לא רציפה ב- $x=5$ אז $f(x)$ לא רציפה בקטע $[5,15]$.
נכון לא נכון

ז. לפונקציה $y = \frac{x}{|x|}$ יש נקודת אי-רציפות ממין ראשון ב- $x=0$.
נכון לא נכון

ח. אם פונקציה לא רציפה בנקודה וקיימים לה גבולות חד-צדדיים בנקודה אז אי-הרציפות היא סליקה.
נכון לא נכון

ט. אם פונקציה לא רציפה בנקודה אז היא לא גזירה באותה הנקודה.
נכון לא נכון

י. לכל מספר משמעותי קיים מספר ממשי הגדול ממנו.
נכון לא נכון