פתרון תרגיל 1:

1. $0 \in A'$ כי $lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

מצד שני, אם ניקח סדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ אפשר לסדר אותה כתת סדרה של $\{\frac{1}{n}\}$ ולכן נקודת הגבול היחידה היא 0 וסה"כ $A'=\{0\}$.

לכן, $A''=\phi$.

אפשר כמובן להסתכל על נקודת ההצטברות לפי ההגדרה, ולראות שלמעט 0 את כל הנקודות בקבוצה אפשר להקיף בכדור מספיק קטן שאין לו חיתוך עם הקבוצה (למעט המרכז כמובן).

2. נבדוק האם הקבוצות פתוחות או סגורות:

(א) הקבוצה אינה פתוחה, מכיוון שעבור $(\frac{1}{2},0)\in A$, לכל $r>0$ מתקיים: $B\left(\left(\frac{1}{2},0\right),r\right)\nsubseteq A$.

הקבוצה אינה סגורה, כי המשלים אינו קבוצה פתוחה; לכל $r>0$, מתקיים $B\left((1,0),r\right)\nsubseteq A^c$.

(ב) הקבוצה אינה פתוחה, כי עבור $(1,1)\in B$, לכל $r>0$ מתקיים: $B\left((1,1),r\right)\subsetneq B$.

הקבוצה סגורה, מכיוון שהמשלים פתוחה; לכל נקודה $(x,y)\in B^c$ נסמן את מרחקה מהישר $y=x$ ב$-D$ ואז $B\left((x,y),\frac{D}{2}\right)\subseteq B^c$.

(ג) הקבוצה פתוחה; לכל $(x,y)\in C$ נסמן את מרחקה מהישר $x+y+1=0$ ב$-D$, ונסמן: $r=\frac{1}{2}\min\{|x|,|y|,D\}$ ונקבל ש: $B\left((x,y),r\right)\subseteq C$.

הקבוצה לא סגורה, כי המשלים אינה פתוחה; עבור $(0,0)\in C^c$, לכל $r>0$ $B\left((0,0),r\right)\subsetneq C^c$ ולכן אינה פתוחה.

3. נבדוק האם הקבוצות פתוחות או סגורות:

(א) הקבוצה לא פתוחה; לכל $r > 0$, $B((0,0),r) \subsetneq A$.

הקבוצה סגורה; ׳

(ב) הקבוצה לא פתוחה; לכל $r > 0$, $B((0,1),r) \not\subseteq B$.

הקבוצה לא סגורה, מכיוון שמשלימתה אינה פתוחה; $(1,0) \in B^c$ אך לכל $r > 0$, $B((1,0),r) \not\subseteq B^c$.

(ג) הקבוצה פתוחה; לכל $(x,y) \in C$ נסמן: $r = \frac{1}{2}\min\{|x|,|y|\}$ ואז: $B((x,y),r) \subseteq C$, כי אם $(a,b) \in B((x,y),r)$ אז:

$$|a-x| < \sqrt{|x-a|^2 + |y-b|^2} < r \le \frac{1}{2}|x|$$

ולכן:

$$a > |x| - \frac{1}{2}|x| > 0$$

באופן דומה, $|b-y| < \frac{1}{2}|y|$ ולכן:

$$b < y + \left|\frac{1}{2}y\right| = -|y| + \frac{1}{2}|y| < 0$$

וסה"כ: $(a,b) \in C$.

הקבוצה לא סגורה, כי משלימתה אינה פתוחה; $(0,0) \in C^c$ אך לכל $r > 0$, $B((0,0),r) \not\subseteq C$.

4. 1. לא בהכרח. נתבונן בקבוצות $A=(0,2)\,,B=(3,4)$ ב-$\mathbb{R}$. הקבוצות קשירות (אלו כדורים פתוחים) אך האיחוד שלהן לא קבוצה קשירה; (הקבוצות $A=U,B=V$ מכסות אותו).

2. לא בהכרח. נתבונן בקבוצות:

$$A=\{(x,y)|0\le y\le 1,0\le x\le 3\}\cup\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 3\}$$

$$B=\{(x,y)|2\le y\le 3,0\le x\le 3\}\cup\{(x,y)|2\le x\le 3,0\le y\le 3\}$$

ב-$\mathbb{R}^2$. כל אחת מהן קשירה, אך החיתוך אינו קבוצה קשירה.

3. לא בהכרח. נתבונן בקבוצות $A=(0,3)\,,B=(1,2)$ ב-$\mathbb{R}$. הקבוצות קשירות אך ההפרש אינו קבוצה קשירה.

5. **א.** $f(x,y)=\ln\left(1-x^2-y^2\right)$

$$D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2<1\right\}$$

(עיגול עם מרכז ב $(0,0)$ ורדיוס 1 לא כולל מעגל).

ב. $f(x,y)=xe^{-\sqrt{y+2}}$

$$D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\ge -2\right\}$$

(חלק של המישור מעל הקו $y=-2$).

ג. $f(x,y,z)=\dfrac{xyz}{x+y+z}$

$$D_f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x+y+z\ne 0\right\}$$

(כל הנקודות ב $\mathbb{R}^3$ חוץ מהנקודות של המישור $x+y+z=0$).

ד. $f(x,y,z)=z+\ln\left(1-x^2-y^2\right)$

$$D_f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2<1\right\}$$

(החלק הפנימי של הגליל (לא כולל מעטפת) עם בסיס עם רדיוס 1 ומרכזו על הציר z).

6. **א.** $\lim\limits_{(x,y)\to(4,\pi)} x^2\sin\frac{y}{x}$

$$\lim_{(x,y)\to(4,\pi)} x^2\sin\frac{y}{x} = 16\sin\frac{\pi}{4} = 8\sqrt{2}$$

$\uparrow$

הצבנו בגלל רציפות הפונקציה $x^2\sin\frac{y}{x}$

בנקודה $(4,\pi)$.

ב.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(y,\frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2}\right) \quad .$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2} = ?$$

$$\lim_{\substack{x=y\\ x\to 0}}\frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2} = 1$$

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}}\frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2} = 0$$

$\Leftarrow$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2}$ **אינו** קיים .

$\Leftarrow$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(y,\frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2}\right)$ **אינו** קיים .

ג. $$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^4+y^4+z^2}$$

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{xyz}{x^4+y^4+z^2}=0$$

$$\lim_{\substack{x=y\\ z=x^2\\ x\to 0}} \frac{xyz}{x^4+y^4+z^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{3x^4}=\frac{1}{3}$$

$\Leftarrow$ הגבול הנתון **אינו** קיים .

ד. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=1 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cdot\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=0$$

ה. $$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+9}-3}$$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t=x^2+y^2+z^2}} \frac{t}{\sqrt{t+9}-3}=\lim_{t\to 0}\frac{t\left(\sqrt{t+9}+3\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\sqrt{t+9}+3=6$$

.7

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ a & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$$

$$0\le\left|\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|$$

$$\le\left|\frac{x^3}{x^2}\right|+\left|\frac{xy^2}{y^2}\right|=|x|+|x|\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$$

$\Leftarrow$ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$$

$\Leftarrow$ עבור $a=0$ הפונקציה $f(x,y)$ רציפה.