טופולוגיה אלגברית 1 - תרגיל בית 2

שאלה 1

הראה שמרחב כוויץ הוא קשיר מסילתית.

הוכחה:

יהי X מרחב טופולוגי כוויץ. אזי Id_X הומוטופית להעתקה קבועה K_a

עבור $a\in X$ כלשהו. נסמן $H: X\times I \longrightarrow X$ ההומוטופיה המעידה על כך.

מספיק להראות שיש מסילה מכל $b\in X$ ל-a (אחר כך משרשרים מסילות).

נגדיר $\gamma: I \longrightarrow X$ ע"י $\gamma(t) := H(b, t)$.

γ רציפה, כי H רציפה. כמו כן,

$$\gamma(0)=H(b,0)=Id_X(b)=b \quad ; \quad \gamma(1)=H(b,1)=K_a(b)=a$$

ולכן γ מסילה מ-b ל-a, כדרוש.

שאלה 2

הראה שנסג של מרחב כוויץ הוא כוויץ.

הוכחה:

יהי X מרחב כוויץ, ויהי $A \subseteq X$ נסג של X, כלומר קיימת העתקה $r: X \longrightarrow A$ כך שלכל $a \in A$, $r(a) = a$.

X כוויץ, ולכן קיימת הומוטופיה $H: X \times I \longrightarrow X$ ו-$y \in X$ שעבורם:

א. $H(x,0) = x$ לכל $x \in X$.

ב. $H(x,1) = y$ לכל $x \in X$.

נגדיר פונקציה $K: A \times I \longrightarrow A$ ע"י $K(a,t) = r(H(a,t))$.

K רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות. מתקיים:

א. $K(a,0) = r(H(a,0)) = r(a) = a$ לכל $a \in A$.

ב. $K(a,1) = r(H(a,1)) = r(y) \in A$ לכל $a \in A$.

אם כן, הראינו שפונקציית הזהות Id_A הומוטופית לפונקציה קבועה $K_{r(y)}: A \longrightarrow A$.

שאלה 3

יהי X מרחב טופולוגי כוויץ, ויהי Y מרחב טופולוגי כלשהו.

הראה שכל ההעתקות $Y \to X$ הומוטופיות זו לזו.

הוכחה:

X כוויץ, ולכן קיימת הומוטופיה $H: X\times I \to X$ המקיימת:

א. $H(x,0)=x$ לכל $x\in X$.

ב. $H(x,1)=a$ לכל $x\in X$ עבור $a\in X$ כלשהו.

נוכיח שכל העתקה $f: Y \to X$ הומוטופית ל-k_a, וכיוון שזהו יחס שקילות נסיים.

נגדיר $K: Y\times I \to X$ ע"י $K(y,t) := H(f(y),t)$.

K רציפה, כהרכבה של פונקציות רציפות:

$$Y\times I \xrightarrow[(y,t)\mapsto (f(y),t)]{} Y\times I \xrightarrow[H]{} X$$

כמו כן, לכל $y\in Y$

$K(y,0) = H(f(y),0) = f(y)$

$K(y,1) = H(f(y),1) = a$

לכן K הומוטופיה בין f ל-k_a, כדרוש.

שאלה 4

יהי X מרחב טופולוגי כוויץ, ו-Y מרחב טופולוגי קשיר מסילתית.
הראה שכל ההעתקות $X\longrightarrow Y$ הומוטופיות זו לזו.

הוכחה:

X כוויץ, ולכן קיימת הומוטופיה $H:X\times I\longrightarrow X$ וקיים $a\in X$ שעבורם
לכל $x\in X$, $H(x,0)=x$ ו- $H(x,1)=a$.

תהיינה $f,g:X\longrightarrow Y$. נוכיח כי $f\sim K_{f(a)}$ ו- $g\sim K_{g(a)}$.
מספיק להוכיח עבור f (עבור g באופן דומה).

נגדיר $K:X\times I\longrightarrow Y$ ע"י $K(x,t):=f(H(x,t))$.
K רציפה, כהרכבה של פונקציות רציפות. כמו כן, לכל $x\in X$,

$$K(x,0)=f(H(x,0))=f(x) \quad ; \quad K(x,1)=f(H(x,1))=f(a)$$

ולכן K הומוטופיה מ-f ל-$K_{f(a)}$, כדרוש.

נותר להוכיח $K_{f(a)}\sim K_{g(a)}$. Y קשיר מסילתית, ולכן קיימת
מסילה $\gamma:I\longrightarrow Y$ מ-$f(a)$ ל-$g(a)$. נגדיר $S:X\times I\longrightarrow Y$ ע"י $S(x,t):=\gamma(t)$.
S רציפה, כי γ רציפה. כמו כן, לכל $x\in X$,

$$S(x,0)=\gamma(0)=f(a) \quad ; \quad S(x,1)=\gamma(1)=g(a)$$

ולכן S הומוטופיה מ-$K_{f(a)}$ ל-$K_{g(a)}$, כדרוש.

בסך הכל, $f\sim K_{f(a)}\sim K_{g(a)}\sim g$.