טופולוגיה אלגברית 1 - תרגיל בית 8

שאלה 1

יהיו G ו-H חבורות. מילה ב-$W=W(G,H)$ נקראת מצומצמת, אם האותיות מ-G ומ-H מופיעות בה לסירוגין, ואם האותיות 1_G ו-1_H אינן מופיעות בה בכלל.

הראה שלכל איבר ב-$G*H$ יש נציג יחיד שהוא מילה מצומצמת.

הוכחה:

הקיום ברור - לוקחים נציג מהאיבר ומצמצמים בו את כל מה שאפשר.

נוכיח יחידות. נניח ש-a ו-b שתי מילים מצומצמות, המייצגות אותו איבר.

כלומר, יש סדרת מהלכים $a \longrightarrow \cdots \longrightarrow b$, על פי יחס השקילות.

נוכיח באינדוקציה על סכום האורכים של המילים בתהליך זה.

מ-a חייבים להוסיף אות (צ"ל לעלות באורך המילה), ול-b חייבים להוריד אות (צ"ל לרדת באורך המילה) ולכן קיימת מילה q שאורכה מקסימלי. נסמן ב-p את המילה שלפניה וב-r את המילה שאחריה. נחלק למקרים:

א. $p=(\underline{A},\underline{B})$, $q=(\underline{A},1_G,\underline{B})$ (באופן דומה עבור 1_H):

(1) אם $r=(\underline{A},\underline{B})$, אפשר לוותר על q ועל r.

(2) אם $r=(\underline{A'},1_G,\underline{B})$, אפשר לוותר על q ולהחליף כל מילה בהמשך באותה מילה בלי 1_G (ובמקום, לוותר על השלב שבו מורידים את 1_G).

ב. $p=(\underline{A},\overset{G}{\overset{\in}{g_1g_2}},\underline{B})$, $q=(\underline{A},g_1,g_2,\underline{B})$ (באופן דומה עבור איברים מ-H).

(1) אם $r=(\underline{A},g_1g_2,\underline{B})$, אפשר לוותר על q ועל r.

(2) אם $p=(\underbrace{\underline{A'},g_0}_{A},g_1g_2,\underline{B})$, $q=(\underline{A'},g_0,g_1,g_2,\underline{B})$, $r=(\underline{A'},g_0g_1,g_2,\underline{B})$, אז אפשר להחליף את q ב-$(\underline{A'},g_0g_1g_2,\underline{B})$.

באופן דומה גם אם מחברים את g_2 ל-B.

ראינו שבכל מקרה ניתן לרדת בסכום האורכים של המילים בתהליך זה, ולכן $a=b$.

שאלה 2

המרכז של חבורה G הוא תת-החבורה $C=\{g\in G \mid \forall x\in G: gx=xg\}$,
כלומר איבר g שייך ל-C אם הוא מתחלף עם כל איברי G.
יהיו G ו-H חבורות לא טריוויאליות. הראה שהמרכז של $G*H$ טריוויאלי.

הוכחה:

נניח כי $x\in C$, וש-x אינו המילה הריקה.

נוכיח כי תמיד קיים $y\in G*H$ כך ש- $xy\neq yx$. נחלק למקרים:

א. נניח כי הנציג המצומצם של x הינו $x=g_1h_1g_2h_2\dots g_nh_n$, $1_G\neq g_i\in G$, $1_H\neq h_i\in H$.

יהי $1_G\neq g\in G$. אזי $xg=g_1h_1\dots g_nh_ng$ במילה מצומצמת מאורך $2n+1$,
אבל $gx=gg_1h_1\dots g_nh_n=(gg_1)h_1\dots g_nh_n$ נציג מאורך $2n$, ולכן $xg\neq gx$
(לפי היחידות של המילה המצומצמת).

ב. נניח כי הנציג המצומצם של x הינו $x=g_1h_1g_2h_2\dots g_nh_ng_{n+1}$, $1_G\neq g_i\in G$, $1_H\neq h_i\in H$.

יהי $1_G\neq g\in G$. אזי $gx=(gg_1)h_1g_2h_2\dots g_nh_ng_{n+1}$, וכן
$xg=g_1h_1g_2h_2\dots g_nh_n(g_{n+1}g)$.

(1) אם $gg_1\neq 1_G$ וגם $g_{n+1}g\neq 1_G$, שתי המילים מצומצמות,
ולכן $gg_1=g_1 \Leftarrow g=1_G$, בסתירה.

(2) אם $gg_1=1_G$, המילה המצומצמת של gx היא $h_1g_2\dots g_nh_ng_{n+1}$.
אם $g_{n+1}g=1_G$, המילה המצומצמת של xg היא $g_1h_1\dots g_nh_n$.
לכן לא יתכן ששני התנאים האלו מתקיימים יחד.
אם בה"כ $gg_1=1_G$ אבל $g_{n+1}g\neq 1_G$, המילה המצומצמת של xg
היא זו הכתובה למעלה (מקרה (1)), ולכן $xg\neq gx$.

באופן דומה עבור מילים המתחילות באיברים מ-H.

בסך הכל, $C=\{1\}$.

שאלה 3

הראה שעבור $n\geq 2$, המרכז של F_n הוא טריוויאלי.

הוכחה:

לכל $n\geq 2$ מתקיים $F_n \cong F_{n-1} * F_1$.

F_1 אינה טריוויאלית (בתרגיל בית 7 שאלה 1 הוכחנו $F_1\cong\mathbb{Z}$),

וגם F_{n-1} אינה טריוויאלית.

לכן, לפי השאלה הקודמת, המרכז של F_n טריוויאלי.

שאלה 4

יהיו $G=\langle x_1,\dots,x_n \mid R_1,\dots,R_k\rangle$, $H=\langle y_1,\dots,y_m \mid S_1,\dots,S_l\rangle$, $P=\langle z_1,\dots,z_p \mid T_1,\dots,T_q\rangle$,

ויהיו $g:P\longrightarrow G$ ו- $h:P\longrightarrow H$. הראה שמתקיים:

$$G \underset{{}_{g}\nearrow P \nwarrow_{h}}{*} H \cong \langle x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m \mid R_1,\dots,R_k,S_1,\dots,S_l,\ g(z_1)h(z_1)^{-1},\dots,g(z_p)h(z_p)^{-1}\rangle$$

הוכחה:

נסמן את החבורה באגף ימין $\mathcal{U}$, ונוכיח כי היא מקיימת את התכונה האוניברסלית של $G \underset{{}_{g}\nearrow P \nwarrow_{h}}{*} H$.

צריך להגדיר $i:G\longrightarrow \mathcal{U}$ ו- $j:H\longrightarrow \mathcal{U}$. לפי התכונה האוניברסלית של יוצרים ויחסים, מספיק להגדיר את i ואת j על היוצרים, ולהראות שהיחסים של G ושל H מתקיימים.

נגדיר $i(x_t)=x_t$, $1\le t\le n$, ו- $j(y_t)=y_t$, $1\le t\le m$.

עבור i, היחסים $R_1,\dots,R_k$ מתקיימים, כי הם מתקיימים ב-$\mathcal{U}$; באופן דומה עבור j.

כעת צריך לבדוק $i\circ g=j\circ h$. מספיק לבדוק על היוצרים של P; אכן,

$$(i\circ g)(z_t)=i(g(z_t))=g(z_t)\underset{\text{ב-}\mathcal{U}}{=}h(z_t)=j(h(z_t))=(j\circ h)(z_t)$$

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dr, "i"] \arrow[drr, bend left, "\varphi"] & & \\
P \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "h"'] & & \mathcal{U} \arrow[r, dashed, "L"] & K \\
 & H \arrow[ur, "j"'] \arrow[urr, bend right, "\psi"'] & &
\end{tikzcd}$$

תהי חבורה K, ויהיו $\varphi:G\longrightarrow K$ ו- $\psi:H\longrightarrow K$ שעבורם $\varphi\circ g=\psi\circ h$. מחפשים הומומורפיזם $L:\mathcal{U}\longrightarrow K$ שיסגור את הדיאגרמה.

לפי התכונה האוניברסלית של יוצרים ויחסים, מספיק להגדיר את L על היוצרים, ולבדוק שהיחסים מתקיימים. נגדיר:

לכל $1\le t\le n$, $L(x_t)=\varphi(x_t)$; לכל $1\le t\le m$, $L(y_t)=\psi(y_t)$

היחסים $R_1,\dots,R_k$ מתקיימים, כי φ מקיימת אותם.

היחסים $S_1,\dots,S_l$ מתקיימים, כי ψ מקיימת אותם.

היחסים $g(z_t)h(z_t)^{-1}$ מתקיימים, כי אם נסמן כאת $x_{i_1}\dots x_{i_u}y_{j_1}\dots y_{j_v}$,

רואים
$$L(x_{i_1})\dots L(x_{i_u})L(y_{j_1})\dots L(y_{j_v})=\varphi(x_{i_1})\dots\varphi(x_{i_u})\psi(y_{j_1})\dots\psi(y_{j_v})=$$
$$=\varphi(x_{i_1}\dots x_{i_u})\psi(y_{j_1}\dots y_{j_v})=\varphi(g(z_t))\psi(h(z_t)^{-1})=$$
$$=\varphi(g(z_t))\psi(h(z_t))^{-1}\underset{\varphi\circ g=\psi\circ h}{=}1$$

לכן מוגדר הומומורפיזם L כנ"ל יחיד.

כמו כן, ברור מן ההגדרה כי $L\circ i=\varphi$ וכי $L\circ j=\psi$.

שאלה 5

תהי $G=\langle x_1,\dots,x_n \mid R_1,\dots,R_k\rangle$. הראה שמתקיים

$$Ab(G)\cong\langle x_1,\dots,x_n \mid R_1,\dots,R_k,\ x_ix_j=x_jx_i,\ 1\le i<j\le n\rangle .$$

<u>הוכחה:</u>

נסמן את החבורה בצד ימין ב-$\mathcal{U}$, ונוכיח שהיא מקיימת את התכונה האוניברסלית של $Ab(G)$.

ראשית יש להגדיר $\rho: G\longrightarrow \mathcal{U}$. לפי התכונה האוניברסלית של יוצרים ויחסים, מספיק להגדיר את ρ על היוצרים כך שיתקיימו היחסים הרצויים. לכל $1\le i\le n$ נגדיר $\rho(x_i)=x_i$.

אכן היחסים $R_1,\dots,R_k$ מתקיימים, כי הם מתקיימים ב-$\mathcal{U}$.

כעת, תהי חבורה אבלית K, ויהי $g:G\longrightarrow K$ הומומורפיזם.

נרצה להגדיר הומומורפיזם $L:\mathcal{U}\longrightarrow K$ שעבורו $L\circ\rho=g$, ולהוכיח שהוא יחיד.

לפי התכונה האוניברסלית של יוצרים ויחסים, מספיק להגדיר את L על היוצרים, ולהראות שמתקיימים היחסים, כדי להסיק ש-L מוגדר והיחידות.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\rho"'] & K \\ & \mathcal{U} \arrow[u, dashed, "L"'] \end{tikzcd}$$

לכל $1\le i\le n$ נגדיר $L(x_i)=g(x_i)$.

נוכיח ש-L מקיימת את $R_1,\dots,R_k$; אם $R_j=x_{i_1}\cdots x_{i_j}$, אז: רואים

$$L(x_{i_1})\cdots L(x_{i_j}) = g(x_{i_1})\cdots g(x_{i_j}) = g(x_{i_1}\cdots x_{i_j}) = g(R_j) \underset{G\text{-ב } R_j=1}{=} g(1) = 1$$

כעת, נותר להראות ש-L מקיימת את $x_ix_jx_i^{-1}x_j^{-1}$:

$$L(x_i)L(x_j)L(x_i)^{-1}L(x_j)^{-1} = \underset{\in K}{g(x_i)}\,\underset{\in K}{g(x_j)}\,g(x_i)^{-1}g(x_j)^{-1} \underset{K \text{ אבלית}}{=} g(x_i)g(x_i)^{-1}g(x_j)g(x_j)^{-1} = 1$$

בסך הכל, אכן מוגדר הומומורפיזם L כנ"ל יחיד.

שאלה 6

יהיו $G=\langle x_1,\dots,x_n | R_1,\dots,R_k\rangle$ ו-$H=\langle y_1,\dots,y_m | S_1,\dots,S_\ell\rangle$. הראה שמתקיים:

$$G\times H\cong\langle x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m | R_1,\dots,R_k,S_1,\dots,S_\ell,\ x_iy_j=y_jx_i,\ 1\le i\le n, 1\le j\le m\rangle$$

הוכחה:

נסמן את החבורה מצד שמאל U, ונגדיר את ההומומורפיזמים $\varphi: G\times H\longrightarrow U$ ו-$\psi: U\longrightarrow G\times H$.

את φ מספיק להגדיר על היוצרים (x_i,y_j): $\varphi((x_i,y_j)):=x_iy_j$.

φ הומומורפיזם, כי

$$\varphi((x_i,y_j)(x_t,y_s))=\varphi((x_ix_t,y_jy_s))=x_ix_ty_jy_s=$$
$$=x_iy_jx_ty_s=\varphi((x_i,y_j))\varphi((x_t,y_s))$$

כעת, נגדיר $\psi: U\longrightarrow G\times H$. מספיק להגדיר על היוצרים ולהראות שמתקיימים היחסים, ולכן נגדיר $\psi(x_i)=(x_i,1_H)$ ו-$\psi(y_j)=(1_G,y_j)$.

היחסים $R_1,\dots,R_k$ ו-$S_1,\dots,S_\ell$ מתקיימים, כי הם מתקיימים ברכיב המתאים.

נותר לבדוק את היחס $x_iy_jx_i^{-1}y_j^{-1}=1$, ואכן

$$\psi(x_i)\psi(y_j)\psi(x_i)^{-1}\psi(y_j)^{-1}=(x_i,1_H)(1_G,y_j)(x_i,1_H)^{-1}(1_G,y_j)^{-1}=(1_G,1_H)=1_{G\times H}$$

לכן ψ הומומורפיזם.

כעת נבדוק $\varphi\circ\psi=Id_U$ ו-$\psi\circ\varphi=Id_{G\times H}$. מספיק לבדוק על היוצרים, ואכן

$$\left.\begin{aligned}(\varphi\circ\psi)(x_i)&=\varphi(\psi(x_i))=\varphi((x_i,1_H))=x_i1_H=x_i\\(\varphi\circ\psi)(y_j)&=\varphi(\psi(y_j))=\varphi((1_G,y_j))=1_Gy_j=y_j\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\varphi\circ\psi=Id_U$$

$$(\psi\circ\varphi)((x_i,y_j))=\psi(\varphi((x_i,y_j)))=\psi(x_iy_j)=\psi(x_i)\psi(y_j)=(x_i,1_H)(1_G,y_j)=(x_i,y_j)$$

כדרוש.

לכן φ ו-ψ איזומורפיזמים.