חידה לתרגול 5

חשבו את הסגור של הקבוצות הבאות:

1. $\left\{\frac{a^n}{b^m} \mid n, m \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq \mathbb{R}^{>0}$ עבור $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
2. $\mathbb{P} := \{q \in \mathbb{Z} \mid \text{q is prime}\} \subseteq \mathbb{Z}$ עם הטופולוגיה ה־p־אדית.

<u>פתרון:</u>

1. נסמן את הקבוצה הנתונה ב־A. ראשית, הפונקציה $f := \log : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ היא הומאומורפיזם ולכן $cl(A) = f^{-1}(cl(f(A))$ (קל לראות שזה נכון לפי קריטריון הרציפות האחרון שלמדנו בכיתה). נשים לב ש־

$$f(A) = \{n \log a - m \log b \mid n, m \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \log a + \mathbb{Z} \log b$$

נחלק לשני מקרים:

(א) קיימים $m, n \in \mathbb{Z}$ שאינם שניהם אפס כך ש־$a^n = b^m$: במקרה זה, נסמן $c := a^n = b^m$ ואז

$$\mathbb{Z} \log a + \mathbb{Z} \log b = \mathbb{Z} \log c^{\frac{1}{n}} + \mathbb{Z} \log c^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{n} \mathbb{Z} \log c + \frac{1}{m} \mathbb{Z} \log c =$$

$$\left(\frac{1}{n}\mathbb{Z} + \frac{1}{m}\mathbb{Z}\right) \log c = \frac{\log c}{lcm(n,m)} \mathbb{Z}$$

כאשר lcm הוא הכפולה המשותפת המינימלית. זו קבוצה סגורה ודלילה ב־$\mathbb{R}$ ולכן A סגורה ודלילה ב־$\mathbb{R}^{>0}$.

(ב) לא קיימים $m, n \in \mathbb{Z}$ כאלה. במצב כזה אנחנו טוענים ש־$\log a$ ו־$\log b$ הם בלתי תלויים רציונלית, כלומר שלא קיימים רציונלים לא טריוויאלים $p, q \in \mathbb{Q}$ כך ש־

$$p \log a + q \log b = 0$$

אם היו כאלה, אז על ידי כפולה ב־M שמחלק את המחלקים של p ו־q היינו מגיעים למצב של

$$n \log a + m \log b = 0 \Rightarrow \log a^n b^m = 0 \Rightarrow a^n = b^{-m}$$

עבור $m, n \in \mathbb{Z}$, וזו סתירה. לפי משפט קרונקר (חפשו בויקיפדיה באנגלית), מתקיים ש־$\mathbb{Z} \log a + \mathbb{Z} \log b$ צפוף ב־$\mathbb{R}$. לכן,

$$cl(A) = f^{-1}(cl(f(A)) = f^{-1}(cl(\mathbb{Z} \log a + \mathbb{Z} \log b)) = f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{>0}$$

כלומר הקבוצה A צפופה.

2. ראשית, קל לראות שאם $n \in p\mathbb{Z} \setminus \{p\}$ אז ל־ $\varepsilon > 0$ קטן מספיק מתקיים ש־ $B(n,\varepsilon) \subseteq p\mathbb{Z} \setminus \{p\}$. לכן,

$$p\mathbb{Z} \setminus \{p\} \subseteq cl(\mathbb{P})^c$$

מנגד ברור ש־$p \in \mathbb{P}$. בנוסף, לכל $b \notin p\mathbb{Z}$ מתקיים ש־b זר ל־p^n לכל $n \in \mathbb{N}$. לפי משפט דריכלה (חפשו בויקיפדיה), $b + p^n\mathbb{Z}$ מכילה אינסוף ראשוניים, ובפרט

$$(b + p^n\mathbb{Z}) \cap \mathbb{P} \neq \emptyset$$

לפי הגדרה, $b \in cl(\mathbb{P})$. לפי הכלה דו כיוונית, $cl(\mathbb{P}) = \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z} \cup \{p\}$.