פתרון תרגיל 6 טופולוגיה תשע"ו

6 באפריל 2016

1. נשתמש בכך שסגור היא הסגורה המינימלית שמכילה והפנים היא הפתוחה המקסימלית שמוכלת.

(א) נוכיח. $A\cap B\subseteq A\subseteq cl\left(A\right),A\cap B\subseteq B\subseteq cl\left(B\right)$ ולכן:

$$A\cap B\subseteq cl\left(A\right)\cap cl\left(B\right)$$

מכיוון שהקבוצות $cl\left(A\right),cl\left(B\right)$ סגורות, גם $cl\left(A\right)\cap cl\left(B\right)$ סגורה, ומכיוון שהיא מכילה את $A\cap B$ והסגור היא הסגורה המינימלית שמכילה, נקבל שאכן:

$$cl\left(A\cap B\right)\subseteq cl\left(A\right)\cap cl\left(B\right)$$

(ב) נפריך. נתבונן בקבוצות: $A=\left(0,1\right),B=\left(1,3\right)$ ב$-\mathbb{R}$. מכיוון שהחיתוך ריק, גם $cl\left(A\cap B\right)=\emptyset$. מאידך גיסא,

$$cl\left(A\right)=\left[0,1\right],cl\left(B\right)=\left[1,3\right]\Longrightarrow cl\left(A\right)\cap cl\left(B\right)=\left\{ 1\right\}$$

ולכן $cl\left(A\right)\cap cl\left(B\right)\nsubseteq cl\left(A\cap B\right)$.

(ג) נפריך. נתבונן בקבוצות: $A=\left[0,1\right],B=\left[1,3\right]$ ב$-\mathbb{R}$. מצד אחד,

$$int\left(A\right)=\left(0,1\right),int\left(B\right)=\left(1,3\right)\Longrightarrow int\left(A\right)\cup int\left(B\right)=\left(0,3\right)\setminus\left\{ 1\right\}$$

ומצד שני:

$$A\cup B=\left[0,3\right]\Longrightarrow int\left(A\cup B\right)=\left(0,3\right)$$

ולכן $int\left(A\cup B\right)\nsubseteq int\left(A\right)\cup int\left(B\right)$.

(ד) נוכיח. $int\left(A\right)\subseteq A\subseteq A\cup B,int\left(B\right)\subseteq B\subseteq A\cup B$ ולכן:

$$int\left(A\right)\cup int\left(B\right)\subseteq A\cup B$$

מכיוון שהקבוצות $int\left(A\right), int\left(B\right)$ פתוחות גם $int\left(A\right)\cup int\left(B\right)$ פתוחה ומכיוון שהיא מוכלת ב־$A\cup B$ והפנים הוא הפתוחה המקסימלית שמוכלת, נקבל:

$$int\left(A\cup B\right)\supseteq int\left(A\right)\cup int\left(B\right)$$

2. שוב, נשתמש בכך שהסגור הוא הסגורה המינימלית שמוכלת.

(א) נשתמש בהכלה דו־כיוונית. מתקיים: $B\left(a,r\right)\subseteq B\left[a,r\right]$. הכדור הסגור הוא קבוצה סגורה ומכיוון שסגור היא הסגורה המינימלית שמכילה,

$$cl\left(B\left(a,r\right)\right)\subseteq B\left[a,r\right]$$

הכיוון הזה נכון בכל מרחב מטרי.
תהי $x\in B\left[a,r\right]$. נראה שהיא נקודת הצטברות של $B\left(a,r\right)$ ואז לפי משפט $x\in cl\left(B\left(a,r\right)\right)$.
מה בין מרחב נורמי למרחב מטרי כללי? אחת מתכונות הנורמה היא הומוגניות, קרי אפשר "לשלוף" סקלר מתוך הנורמה, וכך בעצם להגדיר סדרה עם אינסוף איברים שונים (שמתאימים לאינסוף סקלרים שונים).
אם כן, $\left\Vert x-a\right\Vert \leq r$. נתבונן באיברים מהצורה:

$$x_{n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)x+\frac{a}{n}$$

לכל $n\in\mathbb{N}$, $n>1$. מתקיים: $\left\Vert x_{n}-x\right\Vert =\frac{1}{n}\left\Vert x-a\right\Vert \leq\frac{r}{n}<r$ ולכן $x_{n}\in B\left(0,1\right)$.
לכל r_{0} קיים n עבורו $\frac{r}{n}\leq r_{0}$ ולכן לכל r_{0} קיים $x_{n}\in B\left(x,r_{0}\right)$ ולכן x נקודת הצטברות של $B\left(a,r\right)$.
לכן $x\in cl\left(B\left(a,r\right)\right)$ ולכן $cl\left(B\left(a,r\right)\right)\supseteq B\left[a,r\right]$ ובסך הכל הוכחנו את הדרוש.

(ב) נבחר $X=\left\{ a,b\right\}$ קבוצה עם שני איברים שונים ועם המטריקה הדיסקרטית: $d\left(a,b\right)=1$.
מתקיים: $B\left(a,1\right)=\left\{ a\right\}$. זו קבוצה סגורה (כמו כל קבוצה במרחב דיסקרטי) ולכן $cl\left(B\left(a,1\right)\right)=\left\{ a\right\}$.
מצד שני, $B\left[a,1\right]=X$.

3. לא. נתבונן בקבוצה $\mathbb{Q}$ ב־$\mathbb{R}$. מצד אחד $cl\left(\mathbb{Q}\right)=\mathbb{R}$ (חשבו מהן נקודות ההצטברות של $\mathbb{Q}$) ומצד שני:

$$cl\left(int\left(\mathbb{Q}\right)\right)=cl\left(\emptyset\right)=\emptyset$$

4. נתון ש־A,B קשירות.

(א) לא בהכרח. נתבונן בזוג הכדורים הסגורים ב־$\mathbb{R}^2$:

$$A=B\left[0,1\right],B=B\left[2,1\right]$$

ובאיחוד שלהם $A\cup B$. החיתוך של הכדורים לא ריק ולכן (ממשפט) גם האיחוד קשיר.

עם זאת, הפנים של האיחוד הוא הקבוצה:

$$int\left(A\cup B\right)=B\left(0,1\right)\cup B\left(2,1\right)$$

וזו אינה קבוצה קשירה.

(ב) אותה דוגמה כמו בסעיף הקודם תעבוד גם כאן.

5. $\tau=\left\{O\subseteq X|\left|O^c\right|\leq\aleph_0\right\}\cup\left\{\emptyset\right\}$.

(א) נוכיח שהתכונות הנדרשות מטופולוגיה מתקיימות.

i. $\emptyset\in\tau$, ומכיוון ש: $\mathbb{R}^c=\emptyset$, גם $\mathbb{R}\in\tau$.

ii. תהיינה $\left\{O_i\right\}_{i\in I}\subseteq\tau$.

אם לכל $i\in I$ מתקיים $O_i=\emptyset$, גם $\cup O_i=\emptyset$ ולכן $\cup O_i\in\tau$.

אם קיים $j\in I$ עבורו $O_j\neq\emptyset$, $\left|O_j^c\right|\leq\aleph_0$. $O_j\subseteq\cup O_i$, ולכן $\left(\cup O_i\right)^c\subseteq O_j^c$. לכן:

$$\left|\left(\cup O_i\right)^c\right|\leq\left|O_j^c\right|\leq\aleph_0$$

ולכן גם $\cup O_i\in\tau$.

iii. תהיינה $\left\{O_i\right\}_{i=1}^n\subseteq\tau$.

אם קיים i עבורו מתקיים $O_i=\emptyset$, גם $\cap O_i=\emptyset$ ולכן $\cap O_i\in\tau$.

אם לכל j מתקיים $O_j\neq\emptyset$, $\left|O_j^c\right|\leq\aleph_0$. לכן גם:

$$\left|\left(\cap O_i\right)^c\right|=\left|\cup O_i^c\right|\leq\sum_{i=1}^n\left|O_i^c\right|\leq\aleph_0$$

מכיוון שזהו סכום סופי. לכן גם $\cap O_i\in\tau$.

(ב) תהי $\left\{x_n\right\}$ סדרה המתכנסת ל־x. נתבונן בקבוצה:

$$U=\left(\mathbb{R}\backslash\left\{x_n\right\}\right)\cup\left\{x\right\}$$

$U^c = \{x_n\} \setminus \{x\}$ ולכן $|U^c| \le \aleph_0$, כלומר U פתוחה. $x \in U$ ולכן U סביבה פתוחה של x.

מהגדרת התכנסות, קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ $x_n \in U$. מהגדרת U הדבר אפשרי רק אם לכל $n \ge n_0$, $x_n = x$.

לכן, סדרה מתכנסת במרחב היא סדרה מתכנסת לבסוף.

אם כן, תהי $x \in scl\left(A\right)$. מההגדרה קיימת $\{x_n\} \subseteq A$ המתכנסת ל-x. לפי מה שהסברנו, גם $x \in A$ ולכן $scl\left(A\right) \subseteq A$.

$A \subseteq scl\left(A\right)$ ולכן $scl\left(A\right) = A$.

(ג) נתבונן בקבוצה $A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, זו קבוצה שאינה סגורה (המשלים לא פתוחה). לכן $cl\left(A\right) \neq A$.

(ד) לפי הסעיפים הקודמים, $A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ מקיימת $scl\left(A\right) = A$ וגם $cl\left(A\right) \neq A$. במרחב מטרי, לכל A מתקיים: $cl\left(A\right) = scl\left(A\right)$. לכן המרחב שלנו לא מטריזבילי.

6. נזכור ש: $\partial A = cl\left(A\right) \backslash int\left(A\right)$.

(א) נחלק למקרים. אם $x \in A$, $\chi_A\left(x\right) = 1$. מרציפות χ_A ומכיוון ש-$\{1\}$ סביבה של 1, קיימת סביבה V של x עבורה $\chi_A\left(V\right) \subseteq \{1\}$.

לכן $x \in V \subseteq A$. מכאן, $x \in int\left(A\right)$ ולכן $x \notin \partial A$.

אם $x \notin A$, $\chi_A\left(x\right) = 0$. מרציפות χ_A ומכיוון ש-$\{0\}$ סביבה של 0, קיימת סביבה V של x עבורה $\chi_A\left(V\right) \subseteq \{0\}$.

לכן $V \cap A = \emptyset$ ולכן $x \notin cl\left(A\right)$ ולכן $x \notin \partial A$.

(ב) לפי מה שהוכחנו בסעיף הקודם ובתרגול, נקבל ש-χ_A רציפה ב-x אם ורק אם $x \notin \partial A$.

χ_A רציפה אם ורק אם χ_A רציפה בכל $x \in X$, כלומר $x \notin \partial A$ לכל $x \in X$.

לכן, χ_A רציפה אם ורק אם $\partial A = \emptyset$. נראה שכך הוא אם ורק אם A סגוחה.

אם A סגוחה, A סגורה ופתוחה ולכן $A = int\left(A\right)$ וגם $A = cl\left(A\right)$ ולכן $cl\left(A\right) = int\left(A\right)$. לכן $\partial A = cl\left(A\right) \backslash int\left(A\right) = \emptyset$.

אם $\partial A = \emptyset$, $cl\left(A\right) \subseteq int\left(A\right)$. מכיוון ש-$int\left(A\right) \subseteq A \subseteq cl\left(A\right) \subseteq int\left(A\right)$ נקבל $A = int\left(A\right)$ וגם $A = cl\left(A\right)$ ולכן A סגוחה.

7. נזכור שקבוצה Aהיא צפופה אם ורק אם לכל $V \subseteq X$ פתוחה, $A \cap V \neq \emptyset$.

(א) נניח בשלילה שקיים $u \in U$ כך ש: $u \notin cl\left(A \cap U\right)$. לכן, קיימת סביבה O של u עבורה $O \cap A \cap U$.

נשים לב שגם U סביבה של u, ולכן גם $V = O \cap U$ סביבה של u, ומקיימת $V \cap A = \emptyset$, בסתירה לכך ש-A צפופה.

(ב) מסעיף קודם, $cl\left(A\cap U\right)$ מכילה את U. היא סגורה ולכן $cl\left(U\right)\subseteq cl\left(A\cap U\right)$.
מצד שני, $A\cap U\subseteq U$ ולכן $cl\left(A\cap U\right)\subseteq cl\left(U\right)$. מהכלה דו־כיוונית נקבל את הדרוש.

8. נשים לב שאם מורידים מ־X או מ־Z נקודה כלשהית הם נותרים קשירים. לעומת זאת, אם נוריד מ־Y את נקודת ההשקה בין המעגלים נקבל מרחב לא קשיר. לכן X,Z אינם הומיאומורפיים ל־Y.

9. אם נוריד מ־$\mathbb{R}$ נקודה הוא כבר לא יהיה קשיר, אך $\mathbb{R}^{n}$ פחות נקודה הוא עדיין מרחב קשיר (מכיוון שהוא קשיר מסילתית).

10. f הומיאומורפיזם ובפרט העתקה פתוחה. לכן, מכיוון ש־$int\left(A\right)$ פתוחה גם $f\left(int\left(A\right)\right)$ פתוחה. כמו כן, $int\left(A\right)\subseteq A$ ולכן $f\left(int\left(A\right)\right)\subseteq f\left(A\right)$.
בסה"כ $f\left(int\left(A\right)\right)$ פתוחה המוכלת ב־$f\left(A\right)$ ולכן $int\left(f\left(A\right)\right)\supseteq f\left(int\left(A\right)\right)$.
לצד שני, גם f^{-1} הומיאומורפיזם ולכן פתוחה, ולפי מה שהוכחנו נקבל שלכל $B\in Y$, $int\left(f^{-1}\left(B\right)\right)\supseteq f^{-1}\left(int\left(B\right)\right)$.
עבור $B=f\left(A\right)$ נקבל $int\left(f^{-1}\left(f\left(A\right)\right)\right)\supseteq f^{-1}\left(int\left(f\left(A\right)\right)\right)$. נפעיל את f על שני האגפים ונקבל $int\left(f\left(A\right)\right)\subseteq f\left(int\left(A\right)\right)$.
מהכלה דו־כיוונית נקבל את הדרוש.