

פתרונות (1)

1. יהיו \mathfrak{A}_1 ו \mathfrak{A}_2 שתי משפחות של קבוצות ב X . הראו כי אם $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$ אזי נובע כי $\sigma(\mathfrak{A}_1) = \sigma(\mathfrak{A}_2)$.

פתרון: מכיון ש $\mathfrak{A}_2 \subseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$ נובע כי

$\sigma(\mathfrak{A}_2) \subseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$ מכיון ש $\mathfrak{A}_2 \subseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$ נובע כי הסיגמא אלגברה המינימלית שמכילה את \mathfrak{A}_2 מוכלת ב $\sigma(\mathfrak{A}_1)$, כלומר - $\sigma(\mathfrak{A}_2) \subseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$.
 נובע מכך ש $\sigma(\mathfrak{A}_2) \supseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$.

2. תהי \mathcal{E} משפחה כלשהי של קבוצות ב X . הראו כי לכל $A \in \sigma(\mathcal{E})$ קיימת משפחה בת מנייה $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$ כך ש $A \in \sigma(\mathcal{D})$.

הדרכה:

- א. הראו כי קבוצת הקבוצות ב $\sigma(\mathcal{E})$ המקיימות את תכונה זו הינה סיגמא אלגברה.
- ב. הראו כי הקבוצות ב \mathcal{E} מקיימות את תכונה זו והסיקו את הנדרש.

פתרון:

א. נסמן ב \mathcal{S} קבוצת כל הקבוצות ב $\sigma(\mathcal{E})$ המקיימות את התכונה ונראה כי \mathcal{S} הינה סיגמא אלגברה:

- i. ניקח $E \in \mathcal{E}$, ברור כי $X \in \sigma(E)$ ומכאן ש $X \in \mathcal{S}$.
- ii. אם $A \in \mathcal{S}$ אזי נובע כי קיימת סדרה $\{E_n\}$ כך ש $E_n \in \mathcal{E}$ וגם $A \in \sigma(E_n, n \in \mathbb{N})$ מכאן ש $A^c \in \sigma(E_n, n \in \mathbb{N})$ ולכן $A^c \in \mathcal{S}$.
- iii. תהי $A_n \in \mathcal{S}$. נובע כי לכל n קיימת סדרה $\{E_n^k\}$ של קבוצות כך ש $E_n^k \in \mathcal{E}$ וגם $A_n \in \sigma(E_n^k, k \in \mathbb{N})$. קל לראות כי אז $\{E_n^k\}_{n,k \in \mathbb{N}}$ הינה בת מנייה וכן $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$ ולכן $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \sigma(E_n^k, n, k \in \mathbb{N})$. מכאן ש \mathcal{S} הינה סיגמא אלגברה.
- ב. ברור כי לכל $E \in \mathcal{E}$ מתקיים כי $E \in \sigma(E)$ ולכן $E \in \mathcal{S}$. מכאן נובע כי $\sigma(E) \subseteq \mathcal{S}$ וסיימנו.

3. לכל קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}$ ו $a, b \in \mathbb{R}$ מגדירים $aE + b := \{ax + b : x \in E\}$ (ז"א ש $aE + b$ היא תמונת E תחת הפונקציה הלינארית $x \mapsto ax + b$). הוכיחו: $m^*(aE + b) = |a|m^*(E)$.

פתרון: הזזה ראיתם בהרצאה. לכן נראה רק את המקרה $m^*(aE) = |a|m^*(E)$.

המקרה בו $a = 0$ הינו טריויאלי שכן אז $aE = 0$. נוכיח ל $a \neq 0$.

למה: O כיסוי פתוח של E אם ורק אם aO כיסוי פתוח של aE .

הוכחה:

\Leftarrow : הפונקציה $x \mapsto ax$ פתוחה (ההופכית שלה רציפה) ולכן aO קבוצה פתוחה. מצד שני $aO = a(E \cap O) \cup (a(O/E)) = a(E \cup (O/E)) = aE \cup a(O/E)$. ולכן aO כיסוי פתוח של aE .

\Rightarrow : באותו אופן ע"י $x \mapsto \frac{1}{a}x$ מש"ל.

כעת, נשים לב כי $\bigcup_{n=1}^{\infty} aI_n = a\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right)$ ומכאן ש

$$\begin{aligned} m^*(aE) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \mid aE \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, I_n \text{ is an interval}\right\} \\ &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l(aI_n) \mid E \subseteq a\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} aI_n\right), I_n \text{ is an interval}\right\} \\ &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |a|l(I_n) \mid E \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right), I_n \text{ is an interval}\right\} \\ &= |a|\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \mid E \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right), I_n \text{ is an interval}\right\} \\ &= |a|m^*(E) \end{aligned}$$

מש"ל.

4. הגדרה: נאמר שקבוצה $G \subseteq \mathbb{R}$ היא מטיפוס G_δ אם ניתן להציג אותה כחיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

תהי $E \subseteq \mathbb{R}$ הוכיחו שקיימת קבוצה $G \in G_\delta$ המקיימת $E \subseteq G$ וכן $m^*(G) = m^*(E)$.

הדרכה: עקבו אחרי השלבים הבאים:

א. הוכיחו שלכל קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה פתוחה O , המקיימת $E \subseteq O$ וכן

$$m^*(O) < m^*(E) + \varepsilon$$

ב. בנו סדרה של קבוצות פתוחות מתאימות ע"פ א' וחיתכו אותן.

פתרון:

תהי $E \subseteq \mathbb{R}$. עפ"י ההדרכה, נמצא קבוצה פתוחה O כך ש $m^*(O) < m^*(E) + \varepsilon$. מכיוון שהמידה החיצונית של קבוצה הינה האינפימום על סכום של אורך של קטעים שאיחודם מכסה את E נקבל כי קיימים קטעים $\{I_k\}$ המכסים את E כך ש $\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) < m^*(E) + \varepsilon$. מכאן שאם נסמן $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = O$, נקבל כי

$$m^*(O) \leq \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) < m^*(E) + \varepsilon$$

נבנה סדרה של קבוצות פתוחות $\{O'_m\}$ כך ש $m^*(O'_m) < m^*(E) + \frac{1}{m}$.

נסמן $O = \bigcap_{m=1}^{\infty} O'_m$. זוהי קבוצה ב G_δ . מהמונטוניות של המידה נקבל

$$m^*(E) \leq m^*(O) = m^*\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} O'_m\right) < m^*(E) + \frac{1}{m} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

5. תהי m מידת לבג. נניח כי לכל n A_n הינה קבוצה מדידה ב $[0, 1]$. תהי B קבוצת כל ה x -ים המופיעים באינסוף קבוצות A_n .

א. הראו כי B הינה מדידה לבג.

ב. אם $m(A_n) > \delta > 0$ לכל n , הראו כי $m(B) > \delta$.

ג. אם $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$ אז $m(B) = 0$.

ד. תנו דוגמא למקרה בו $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$ אבל $m(B) = 0$.

פתרון:

א. נשים לב כי ניתן לכתוב את B בצורה הבאה:

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

במילים, אנו רוצים את כל ה x -ים אשר נמצאים בכל זנב של הסדרה $\{A_n\}$. ראינו בהרצאה כי הקבוצות המדידות הינן סיגמא-אלגברה ולכן סגורות לחיתוך ואיחוד בן מנייה. מכאן שאם נסמן

הינה $E_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$ נקבל שהסדרה $\{E_k\}$ הינה סדרה של קבוצות מדידות ולכן הקבוצה B הינה מדידה שכחיתוך של מדידות.

ב. נשים לב כי $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ וגם מתקיים כי $m(E_1) \leq 1$ שכן $E_1 \subseteq [0,1]$. ראינו כי מידה הינה "רציפה" ומכאן ש

$$\begin{aligned} m(B) &= m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k) \geq \delta \end{aligned}$$

ג. מכיון ש $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$ נובע כי $\lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n) = 0$. מהסעיף הקודם נובע כי $m(B) = 0$ ומכאן ש $m(B) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k)$.

ד. ניקח את $A_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)}\right)$. קל לראות כי $m(A_n) = \frac{1}{(n+1)}$ וכי

$$E_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = A_k \text{ מצד שני. } \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty \text{ ולכן}$$

$$m(B) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = m\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = 0$$

6. יהי $\varepsilon > 0$, תהי m מידת לבג, ונניח כי A הינה קבוצת בורל ב \mathbb{R} . הוכח כי אם מתקיים

$$m(A \cap I) \leq (1 - \varepsilon)m(I)$$

לכל אינטרוול I אזי $m(A) = 0$.

פתרון: נניח תחילה כי $m(A) < \infty$. אזי עפ"י ההגדרה של המידה החיצונית m^* (שמסכימה עם m לכל קבוצה מדידה בורל) קיימת קבוצה פתוחה O כך ש $A \subset O$ ו $m(O) < \infty$. ניתן לרשום

$$O = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \text{ כאשר } I_n \text{ קטעים זרים ופתוחים. נקבל כי}$$

$$\begin{aligned} m(A \cap O) &= m\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap I_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A \cap I_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m(A \cap I_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon)m(A \cap I_n) = (1 - \varepsilon)m(A \cap O) \end{aligned}$$

מכאן נובע כי $m(A \cap O) = 0$ ולכן $m(A) = 0$.

עבור המקרה בו $m(A) = \infty$ נתסתכל על $A_i = A \cap [i-1, i]$ עבור $i \in \mathbb{Z}$. ברור כי מתקיים

$$m(A_i \cap I) \leq m(A \cap I) \leq (1-\varepsilon)m(I)$$

לכל אינטוול I . עפ"י המקרה הקודם נובע כי $m(A_i) = 0$. מכאן ש

$$m(A) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap [i-1, i]\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = 0$$

מש"ל

7. יהי (X, S) מרחב מדיד ו μ הינה פונקציה קבוצת חובית ואדיטיבית סופית וכך ש $\mu(\emptyset) = 0$.

נניח שאם A_n הינה סדרת קבוצות עולה אז מתקיים $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$. הראו כי μ הינה מידה.

סדרה של קבוצות זרות אזי מתקיים $\mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \mu(E_n)$ פתרון: מספיק להראות שאם

זוהי סדרה עולה, ומתוך האדיטיביות הסופית $F_n = \bigcup_{i=1}^n E_i$ (סיגמא - אדיטיביות). נגדיר סדרה חדשה

ולכן $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. מתקיים גם ש $\mu(F_n) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$ נובע כי μ של

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

8. נניח ו $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ הינן מידות על מרחב מדיד (X, S) ו $\mu_n(A) \uparrow$ לכל $A \in S$ אזי

$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A)$. האם μ הינה מידה? אם לא תנו דוגמא נגדית.

פתרון: ברור כי $\mu(A) \geq 0$ לכל $A \in S$ וכי $\mu(\emptyset) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\emptyset) = 0$. נראה כי גם התכונה

השלישית מתקיימת.

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_n A_n\right) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_j(A_n) \\ &\text{נסמן את הסכומים החלקיים } c_{ij} = \sum_{n=1}^i \mu_j(A_n) \text{ מתקיים} \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_j(A_n) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} c_{ij} = \sup_{j \in \mathbb{N}} \sup_{i \in \mathbb{N}} c_{ij} \\ &= \sup_{i, j \in \mathbb{N}} c_{ij} = \sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{j \in \mathbb{N}} c_{ij} = \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} c_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

מש"ל.

9. הראו כי אם פונקציה f הינה מונוטונית אזי היא מדידה.

פתרון: ללא הגבלת הכלליות נניח כי f מונוטונית עולה, אחרת נכפול ב-1 ומסגירות של פונקציות מדידות ביחס לכפל נקבל את הפתרון. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ אזי נחלק לשני מקרים:

i. $\alpha \in f(\mathbb{R})$: אזי מהמונוטוניות של f נקבל כי $\{x \mid f(x) \geq \alpha\} = [f^{-1}(\alpha), \infty)$.

ii. $\alpha \notin f(\mathbb{R})$: נגדיר את β להיות $\beta = \inf\{f(x) \mid f(x) > \alpha\}$, כאשר

$\{f(x) \mid f(x) > \alpha\}$ איננה הקבוצה הריקה. אזי

א. $\beta \in \{f(x) \mid f(x) > \alpha\}$ אזי $\{x \mid f(x) \geq \alpha\} = [f^{-1}(\beta), \infty)$.

ב. $\beta \notin \{f(x) \mid f(x) > \alpha\}$ אזי $\{x \mid f(x) \geq \alpha\} = (f^{-1}(\beta), \infty)$.

ג. אם $\{f(x) \mid f(x) > \alpha\}$ הינה ריקה אז היא מדידה.

בכל מקרה ניתן לראות כי f מדידה.

10. תנו דוגמא לפונקציה f שאינה מדידה לבג אבל $|f|$ כן מדידה לבג.

פתרון: ניקח את $f = 1_E - 1_{E^c}$ כאשר E הינה הקבוצה הלא מדידה לבג שראינו מתחילת הקורס.

ברור כי f איננה מדידה שכן $f^{-1}(1) = E$ וזו קבוצה לא מדידה לבג. כעת נשים לב כי $|f| = 1$ וזו

כמובן פונקציה אינדיקטור שניתן לרשום $f = 1_{\mathbb{R}}$ וזו כמובן קבוצה מדידה.

11. יהי מרחב מדיד (X, S) ועליו מוגדרות הפונקציות המדידות f_1, f_2, f_3 ו- $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ ($i=1,2,3$).
 התבוננו במשוואה הבאה

$$f_1(x)t^2 + f_2(x)t + f_3(x) = 0$$

זוהי משוואה ריבועית ב t לכל $x \in X$.

הראו כי $A \equiv \{x \in X : \text{the equation has two distinct roots}\}$ הינה מדידה S .

פתרון: נשים לב כי $A = \{x \in X : f_2^2 - 4f_1f_3 > 0\}$. ראינו כבר כי פונקציות מדידות סגורות תחת כפל

וחיבור ולכן $f_2^2 - 4f_1f_3$ הינה פונקציה מדידה S ומכאן ש $f_2^2 - 4f_1f_3 > 0$ הינה קבוצה מדידה S .

12. יהי מרחב מדיד (X, S) ויהיו f, g פונקציות מדידות S המקבלות ערכים ב \mathbb{R} . הראו כי הפונקציה

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} 1_{(g(x) \neq 0)}$$

הינה מדידה S .

פתרון: ללא הגבלת הכלליות נניח כי $\alpha < 0$, אחרת אתם כבר יודעים מה לעשות..

$$h^{-1}((-\infty, \alpha)) = \{x \in X \mid \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha\}$$

$$= \{x \in X \mid f(x) < g(x)\alpha\} \cap \{g(x) > 0\} \cup \{x \in X \mid f(x) > g(x)\alpha\} \cap \{g(x) < 0\}$$

$$= \{x \in X \mid f(x) - g(x)\alpha < 0\} \cap \{g(x) > 0\} \cup \{x \in X \mid f(x) - g(x)\alpha > 0\} \cap \{g(x) < 0\}$$

מכיוון שהפונקציה $f - \alpha g$ הינה מדידה נקבל כי הקבוצה לעיל מדידה ומכאן ש h מדידה.